

Г.О. Сіренко<sup>1</sup>, М.Ф. Семенюк<sup>2</sup>, Л.М. Солтис<sup>1</sup>

## Розподіл кривин у вершинах мікро- та нанонерівностей шорстких поверхонь твердих тіл, змодельованих випадковим полем

<sup>1</sup>Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,  
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76025, Україна

Тел. (0342) 77.64.15; (096) 813.93.53, e-mail: [sirenkog@rambler.ru](mailto:sirenkog@rambler.ru)

<sup>2</sup>Хмельницький національний університет,

вул. Інститутська, 11, м. Хмельницький, 29016, Україна

Приведений математичний опис анізотропних шорстких поверхонь твердих тіл за допомогою моделі випадкового поля. Показано, що з формул для середньої, повної, головних кривин та співвідношення головних кривин у вершинах нано- та мікронерівностей анізотропної поверхні витікають формули для ізотропної поверхні.

**Ключові слова:** мікронерівності, нанонерівності, математичне сподівання, середня кривина, повна кривина, головні кривини, співвідношення головних кривин, математична модель, фізична модель, тверде тіло, шорстка поверхня, контактні явища, анізотропна поверхня, ізотропна поверхня, випадкове поле.

Стаття постуила до редакції 01.07.2010; прийнята до друку 15.09.2010.

### Вступ

1. У [1] приведений огляд літературних джерел інформації, що описують методи, параметри, математичні та фізичні моделі опису нанометричної та мікрометричної шорсткості поверхонь твердих тіл за допомогою теоретико-математичних моделей, при цьому особливо продуктивним виявилось використання теорії випадкового поля [2, 3].

2. Для математичного опису статистично однорідної ізотропної поверхні в [4–9] при дослідженні поверхні океану при хвилюванні і в [10] при вивченні ізотропної поверхні твердого тіла застосували випадкову функцію для двох змінних  $z=z(x,y)$ , яка має автокореляційну функцію (АКФ)  $R(x,y)$  [10].

Лонгет-Гітінс отримав співвідношення для щільності піків анізотропної гауссовської поверхні [7, 8], а в [4] розглядає питання про кутові коефіцієнти та градієнти такої поверхні.

Найяк [10] отримав математичні вирази для щільності ймовірностей розподілу висот вершин, середньої кривини у вершині та градієнт ізотропної поверхні, а також висоти та кривини піків і кутовий коефіцієнт профілограми цієї ж поверхні. Крім того, Найяк [10] розглянув методику знаходження моментів спектральної щільності ізотропної поверхні за однією профілограмою, яка виміряна у довільному напрямку, а також показав відмінності щільності ймовірностей висот вершин поверхні і піків профілограми від очікуваних значень, кривин вершин поверхні та кривин піків профілограми [10]. Найяк [10] показав на

значну статистичну різницю між даними профілограми та поверхні, яка зростає по мірі зміни параметра широкосмужності  $\alpha$  від  $\infty$  до 1,5. Встановлена відмінність статистичних характеристик поверхні та профілограми, ймовірно, суттєва і для анізотропної поверхні.

3. Подальший розвиток ці підходи для математичного опису анізотропних та ізотропних моделей шорстких поверхонь за допомогою теорії випадкового поля та контактних явищ отримали в роботах Айнбіндера [11], Семенюка [12–36] та Сіренка [36–46], зокрема в [12, 36] отримані математичні вирази для щільності ймовірностей розподілу висот вершин нано- та мікронерівностей анізотропних шорстких поверхонь, з яких витікали аналогічні результати Найяка [10] для ізотропних поверхонь, при цьому автори [12, 36] використали модель випадкового поля шорсткої поверхні, не пов'язуючи її з АКФ якогось певного виду і не використовуючи припущення, які прийняті для опису поверхні з одномірними випадковими функціями або поверхні з сильною анізотропією і орієнтованими мікронерівностями, а також, не припускаючи певної форми нерівностей, в [12, 36] отримано співвідношення для щільності ймовірності висот вершин.

### I. Загальні означення

1. Нехай анізотропна шорстка поверхня описана рівнянням:

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x}, y), \quad (1)$$

де  $\mathbf{z}$  – випадкова функція для двох змінних  $\mathbf{x}$  і  $y$  (випадкове поле);

$\mathbf{x}, y$  – декартові координати на середній площині висот шорсткої поверхні.

Але разом з тим статистичні характеристики поверхні залежать від напрямків  $\theta = \arctg(\mathbf{k}_y/\mathbf{k}_x)$  та інваріантні до переміщення початку координат на поверхні (однорідна поверхня).

**Випадкова функція  $\mathbf{z}$** , яка описує таку шорстку статистично однорідну анізотропну поверхню, має автокореляційну функцію  $\mathbf{R}(\mathbf{x}, y)$  і допускає її спектральний розклад Фур'є  $\Phi(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y)$  на гармонійні компоненти, де  $\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y$  – компоненти хвильового вектора  $\bar{\mathbf{k}}$ , який дорівнює  $\bar{\mathbf{k}} = 2\pi/\lambda$  з довжиною хвилі  $\lambda$ .

**2. Моменти спектральної щільності.** Завдяки статистичній однорідності випадкової поверхні її характеристики можна виразити через моменти спектральної щільності  $\mathbf{m}_{pq}$  або їх інваріантні комбінації. Спектральна щільність (СЩ)  $\Phi(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y)$  має вигляд [8, 10]:

$$\Phi(k_x, k_y) = \frac{1}{4p^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(x, y) \times \exp[-i(xk_x + yk_y)] dx dy, \quad (2)$$

де автокореляційну функцію (АКФ) за визначенням [8, 10] запишемо так:

$$R(x, y) = \lim_{\substack{L_x \rightarrow \infty \\ L_y \rightarrow \infty}} \frac{1}{4L_x L_y} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} z(x_1, y_1) \times z(x_1 + x, y_1 + y) dx_1 dy_1. \quad (3)$$

Якщо шорстка поверхня ізотропна, то функція  $\mathbf{R}(\mathbf{x}, y)$  залежить лише від змінної  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  і не залежить від полярного кута  $\theta = \arctg(y/x)$ . Зворотне перетворення Фур'є записується так [8]:

$$R(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) \times \exp[i(xk_x + yk_y)] dk_x dk_y. \quad (4)$$

З виразу (3) видно, що  $\mathbf{R}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \sigma^2$ , де  $\sigma^2$  – дисперсія, а  $\sigma$  – середнє квадратичне (стандартне) відхилення висоти нерівностей [8, 10]. Тому з (4) витікає [8, 10]:

$$S^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) dk_x dk_y. \quad (5)$$

Вираз (5) відбиває те, що функція  $\Phi(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y)$  визначає той внесок у величину дисперсії  $\sigma^2$ , які додають різні спектральні компоненти, що відповідають хвилям з хвильовим числом  $\mathbf{k}$  і довжинами [8]:

$$l = 2p/|k| \quad (6)$$

та напрямками [8]:

$$q = \arctg(k_x/k_y). \quad (7)$$

Для ізотропних поверхонь функція  $\Phi$  залежить тільки від змінної  $\mathbf{k} \equiv |\mathbf{k}|$ .

Моменти СЩ визначаються так [8, 10]:

$$m_{pq} = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) k_x^p k_y^q dk_x dk_y, \quad (8)$$

де  $\text{Re}$  – дійсна частина числа.

Згідно (8) маємо:  $\mathbf{m}_{00} = \sigma^2$ .

**3. Вирази для АКФ через  $\mathbf{m}_{pq}$ -моменти СЩ** із співвідношень (8) за [12] мають вигляд:

• **анізотропна поверхня:**

$$R(0,0) = S^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) k_x^0 k_y^0 dk_x dk_y = m_{00};$$

$$\frac{\partial^{p+q} R}{\partial x^p \partial y^q} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) k_x^p k_y^q dk_x dk_y;$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}(0,0) = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial y}(0,0) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(0,0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) k_x^2 k_y^0 dk_x dk_y = -m_{20};$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}(0,0) = -m_{11}; \quad \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}(0,0) = -m_{02}; \quad \frac{\partial^3 R}{\partial x^3}(0,0) = 0;$$

$$\frac{\partial^3 R}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 0; \quad \frac{\partial^3 R}{\partial x \partial y^2}(0,0) = 0; \quad \frac{\partial^3 R}{\partial y^3}(0,0) = 0;$$

$$\frac{\partial^4 R}{\partial x^4}(0,0) = m_{40}; \quad \frac{\partial^4 R}{\partial x^3 \partial y}(0,0) = m_{31}; \quad \frac{\partial^4 R}{\partial x^2 \partial y^2}(0,0) = m_{22};$$

$$\frac{\partial^4 R}{\partial x \partial y^3}(0,0) = m_{13}; \quad \frac{\partial^4 R}{\partial y^4}(0,0) = m_{04}.$$

• **ізотропна поверхня:**

$$m_{00} = m_0; \quad m_{20} = m_{02} = m_2; \quad m_{11} = m_{13} = m_{31} = 0; \quad 3m_{22} = m_{40} = m_{04} = m_4 \quad [8, 10].$$

**4. Загальна теорія випадкового поля** викладена в [2, 3]. Для інтегральних перетворень використали [47, 48].

**5. За [10, 12] змінні** позначені так:

$$e_1 = z; \quad e_2 = \partial z / \partial x; \quad e_3 = \partial z / \partial y; \quad e_4 = \partial^2 z / \partial x^2; \quad e_5 = \partial^2 z / \partial x \partial y; \quad e_6 = \partial^2 z / \partial y^2, \quad (9)$$

а змінні  $t, r, j, e'_1$  пов'язані з  $e_4, e_5, e_6, e_1$  рівностями:

$$\left. \begin{aligned} e_4 &= (t + r \cos j) m_{22}^{1/2}; \\ e_5 &= (r \sin j) m_{22}^{1/2}; \\ e_6 &= (t - r \cos j) m_{22}^{1/2}; \\ e'_1 &= \frac{e_1}{\sqrt{m_{00}}} = \frac{e_1}{S} = \frac{z - \bar{z}_0}{S} = \frac{z - 0}{S} = \frac{z}{S}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

де  $e'_1$  – нормована (зведена, приведена, безрозмірна) висота;

$\sigma$  – середнє квадратичне значення висоти нерівностей;

$\bar{z}_0 = 0$  – середня на середній площині (x, y).

**6. Мета роботи** полягала в детальному розгляді процедури та отримання математичних співвідношень очікуваних значень середньої кривини, повної кривини, головних кривин та співвідношення головних кривин у вершинах нано- та мікронерівностей шорстких поверхонь твердих тіл, змодельованих випадковим полем, та обговорення означення ізотропності за відомими підходами та за теорією випадкового поля.

## II. Теоретична частина

**2.1. Середня кривина у вершинах нано- та мікронерівностей анізотропної та ізотропної шорстких поверхонь.**

1. За [10] означимо середню кривину  $\bar{K}_m$  анізотропної поверхні у будь-якій її точці як середнє значення головних кривин  $K_1$  та  $K_2$  у цій точці. Відомо [49], що сума кривин поверхні  $K_x$  та  $K_y$  у довільній точці, обчислених для будь-яких двох взаємно-ортогональних напрямків, дорівнює сумі головних кривин [10, 12]:

$$K_m = \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = \frac{1}{2}(K_x + K_y) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{3/2}} \right\}, \quad (11)$$

де  $K_1, K_2$  – головні кривини;  
 $K_x, K_y$  – кривини у напрямках осей OX і OY.  
 У вершині маємо  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ , тому середня кривина дорівнює [10, 12]:

$$\bar{K}_m = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{2}(e_4 + e_6) = -t m_{22}^{1/2}, \quad (12)$$

де  $t$  – еквівалентна середня кривина.

**2. Використовуючи [10, 12],** вираз (13) з роботи [36] для щільності висот вершин  $P_{sum}(e'_1)$  анізотропної поверхні в термінах  $e_1, \dots, e_6$  [12] представимо так:

$$P_{sum}(e'_1) = (2p)^{-3} \Delta^{-1/2} \exp\left(-\frac{\Delta_2}{2\Delta_{12}} e_1^2\right) \times \iiint_V (e_4 e_6 - e_5^2) \exp\left[\frac{1}{\Delta_{12}} (\Delta_3 e_1 e_4 - \Delta_4 e_1 e_5 + \Delta_5 e_1 e_6 - \frac{\Delta_6}{2} e_4^2 + \Delta_7 e_4 e_5 - \Delta_8 e_4 e_6 - \frac{\Delta_9}{2} e_5^2 + \Delta_{10} e_5 e_6 - \frac{\Delta_{11}}{2} e_6^2)\right] de_4 de_5 de_6, \quad (13)$$

де

$$\mathbf{V} \left\{ \begin{array}{l} e_4 < 0; \\ e_6 < 0; \\ e_4 e_6 - e_5^2 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (14)$$

Запишемо його у вигляді [12]:

$$P_{sum}(e'_1) = \frac{1}{4} p^{-3} \Delta^{-1/2} m_{00}^{1/2} m_{22}^{5/2} \times \exp\left[-\frac{\Delta_2 m_{00}}{2\Delta_{12}} (e'_1)^2\right] \iiint_{V_1} (t^2 - r^2) r \times \exp(A_1 t^2 + A_2 t r \cos j + A_3 t r \sin j + A_5 r^2 \cos j \sin j + A_6 r^2 \sin^2 j + A_4 r^2 \cos^2 j + A_7 e'_1 t + A_8 e'_1 r \cos j + A_9 e'_1 r \sin j) dt dr dj, \quad (15)$$

де

$$\mathbf{V}_1 \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq j \leq 2p; \\ t < 0; \\ 0 \leq r \leq -t \end{array} \right\}; \quad (16)$$

$$de_4 de_5 de_6 = 2 r m_{22}^{3/2} dt dr dj. \quad (17)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = -\frac{m_{22}(\Delta_6 + 2\Delta_8 + \Delta_{11})}{2\Delta_{12}}; \\ A_2 = -\frac{m_{22}(\Delta_6 - \Delta_{11})}{\Delta_{12}}; A_3 = \frac{m_{22}(\Delta_7 + \Delta_{10})}{\Delta_{12}}; \\ A_4 = -\frac{m_{22}(\Delta_6 - 2\Delta_8 + \Delta_{11})}{2\Delta_{12}}; \\ A_5 = \frac{m_{22}(\Delta_7 - \Delta_{10})}{\Delta_{12}}; A_6 = -\frac{\Delta_9 m_{22}}{2\Delta_{12}}; \\ A_7 = \frac{(\Delta_3 + \Delta_5)(m_{00} m_{22})^{1/2}}{\Delta_{12}}; \\ A_8 = \frac{(\Delta_3 - \Delta_5)(m_{00} m_{22})^{1/2}}{\Delta_{12}}; \\ A_9 = -\frac{\Delta_4 (m_{00} m_{22})^{1/2}}{\Delta_{12}}; \end{array} \right\} \quad (18)$$

$\Delta$  – детермінант матриці  $(N_{ij})$ :

$$(N_{ij}) = \begin{pmatrix} m_{00} & 0 & 0 & -m_{20} & -m_{11} & -m_{02} \\ 0 & m_{20} & m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{11} & m_{02} & 0 & 0 & 0 \\ -m_{20} & 0 & 0 & m_{40} & m_{31} & m_{22} \\ -m_{11} & 0 & 0 & m_{31} & m_{22} & m_{13} \\ -m_{02} & 0 & 0 & m_{22} & m_{13} & m_{04} \end{pmatrix}; \quad (19)$$

$$\Delta = \det N; \quad \Delta_{12} = m_{00} \Delta_2 + m_{20} \Delta_3 - m_{11} \Delta_4 + m_{02} \Delta_5;$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} m_{20} & m_{11} \\ m_{11} & m_{02} \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} m_{40} & m_{31} & m_{22} \\ m_{31} & m_{22} & m_{13} \\ m_{22} & m_{13} & m_{04} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} -m_{20} & m_{31} & m_{22} \\ -m_{11} & m_{22} & m_{13} \\ -m_{02} & m_{13} & m_{04} \end{vmatrix}; \Delta_4 = \begin{vmatrix} -m_{20} & m_{40} & m_{22} \\ -m_{11} & m_{31} & m_{13} \\ -m_{02} & m_{22} & m_{04} \end{vmatrix}; \\ \Delta_5 &= \begin{vmatrix} -m_{20} & m_{40} & m_{31} \\ -m_{11} & m_{31} & m_{22} \\ -m_{02} & m_{22} & m_{13} \end{vmatrix}; \Delta_6 = \begin{vmatrix} m_{00} & -m_{11} & -m_{02} \\ -m_{11} & m_{22} & m_{13} \\ -m_{02} & m_{13} & m_{04} \end{vmatrix}; \Delta_7 = \begin{vmatrix} m_{00} & -m_{20} & -m_{02} \\ -m_{11} & m_{31} & m_{13} \\ -m_{02} & m_{22} & m_{04} \end{vmatrix}; \\ \Delta_8 &= \begin{vmatrix} m_{00} & -m_{20} & -m_{11} \\ -m_{11} & m_{31} & m_{22} \\ -m_{02} & m_{22} & m_{13} \end{vmatrix}; \Delta_9 = \begin{vmatrix} m_{00} & -m_{20} & -m_{02} \\ -m_{20} & m_{40} & m_{22} \\ -m_{02} & m_{22} & m_{04} \end{vmatrix}; \Delta_{10} = \begin{vmatrix} m_{00} & -m_{20} & -m_{11} \\ -m_{20} & m_{40} & m_{31} \\ -m_{02} & m_{22} & m_{13} \end{vmatrix}; \\ \Delta_{11} &= \begin{vmatrix} m_{00} & -m_{20} & -m_{11} \\ -m_{20} & m_{40} & m_{31} \\ -m_{11} & m_{31} & m_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} (20)$$

**3. Аналогічно (13), (15) знайдемо** спільну щільність висот вершин та еквівалентних середніх кривин  $P_{sum}(e'_1, t)$ .

Співвідношення для щільності ймовірностей розподілу висот вершин  $p(e'_1)$  анізотропної поверхні знайдемо за [10] шляхом ділення щільності висот вершин  $P_{sum}(e'_1)$  (15) на щільність вершин  $D$ , вираз для якої отримано в [4]:

$$p(e'_1) = P_{sum}(e'_1) / D; \quad (21)$$

де

$$D = \frac{1}{2} p^{-2} (L_2 L_3)^{1/2} \Delta_1^{-1/2} [(1 - L_1 / L_2)^{1/2} \times \\ \times E_1(K) - (1 - L_1 / L_2)^{-1/2} U_1(K)]; \quad (22)$$

$U_1(K)$ ,  $E_1(K)$  – повні еліптичні інтеграли Лежандра 1-го і 2-го роду [48]:

$$U_1(K) = \int_0^{p/2} \frac{dj}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 j}}; \quad (23)$$

$$E_1(K) = \int_0^{p/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 j} \, dj; \quad (24)$$

$$K = \left( \frac{1 - L_2 / L_3}{1 - L_2 / L_1} \right)^{1/2}; \quad (25)$$

$L_1 \geq L_2 \geq L_3$  – корені рівняння;

$$\begin{vmatrix} \left( \frac{1}{2} m_{22} - L \right) & -m_{31} & \frac{1}{2} m_{40} \\ \frac{1}{2} m_{13} & -(m_{22} + L) & \frac{1}{2} m_{31} \\ \frac{1}{2} m_{04} & -m_{13} & \left( \frac{1}{2} m_{40} - L \right) \end{vmatrix} = 0, \quad (26)$$

або  $4L^3 - 3HL - \Delta_2 = 0$ ;

$$H = \frac{1}{3} (m_{40} m_{04} - 4m_{31} m_{13} + 3m_{22}^2) = \frac{M_5}{3}, \quad (27)$$

$$\text{де } M_5 = m_{40} m_{04} - 4m_{31} m_{13} + 3m_{22}^2. \quad (28)$$

Звідки за процедурою [10] отримано вираз для щільності ймовірностей розподілу висот вершин **анізотропної шорсткої поверхні** [12]:

$$p(e'_1) = \frac{1}{4} D^{-1} p^{-3} \Delta^{-1/2} m_{00}^{1/2} m_{22}^{5/2} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{\Delta_2 m_{00}}{2\Delta_{12}} (e'_1)^2 \right] \int_{-\infty}^0 \exp(A_1 t^2 + A_7 e'_1 t) dt \times \\ \times \int_0^{-t} (t^2 - r^2) r dr \int_0^{2p} \exp[A_4 r^2 \cos^2 j + \\ + A_5 r^2 \cos j \sin j + A_6 r^2 \sin^2 j + \\ + (A_2 t + A_8 e'_1) r \cos j + (A_3 t + A_9 e'_1) r \sin j] dj. \quad (29)$$

**4. Аналогічно, здійснивши нормування функції**  $P_{sum}(e'_1, t)$ , розділивши її на  $D$ , отримаємо спільну щільність ймовірностей змінних  $e'_1$  і  $t$ :

$$p(e'_1, t) = P_{sum}(e'_1, t) / D. \quad (30)$$

Сподіване значення середньої кривини у вершинах нано- або мікронерівностей висотою  $e'_1$  для **анізотропної** шорсткої поверхні знайдемо таким чином [12]:

$$E\bar{K}_m(e'_1) = -m_{22}^{1/2} \frac{\iiint_{V_1} t p(e'_1, t, r, j) dt dr dj}{\iiint_{V_1} p(e'_1, t, r, j) dt dr dj}. \quad (31)$$

Враховуючи співвідношення для спільної щільності ймовірностей змінних  $e'_1, t, r, j$  формулу (31) для анізотропної поверхні можна записати таким чином [12]:

$$E\bar{K}_m(e'_1) = -m_{22}^{1/2} \frac{Q(e'_1)}{p(e'_1)}, \quad (32)$$

де

$$Q(e'_1) = \frac{m_{00}^{1/2} m_{22}^{5/2}}{4Dp^3 \Delta^{1/2}} \exp\left[-\frac{\Delta_2 m_{00}}{2\Delta_{12}} (e'_1)^2\right] \times \\ \times \int_{-\infty}^0 t \exp(A_1 t^2 + A_7 e'_1 t) dt \int_0^{-t} (t^2 - r^2) r dr \times \\ \times \int_0^{2p} \exp[A_4 r^2 \cos^2 j + A_5 r^2 \cos j \cdot \sin j + \\ + A_6 r^2 \sin^2 j + (A_2 t + A_8 e'_1) r \cos j + \\ + (A_3 t + A_9 e'_1) r \sin j] dj ;$$

$p(e'_1)$  – щільність ймовірностей висот вершин для нормованої висоти нерівності в точці  $e'_1$  (29).

**5. Враховуючи, що для ізотропної шорсткої поверхні співвідношення для щільності висот вершин [10]:**

$$P_{sum}(e_1) = (2p)^{-3} \Delta^{-1/2} \exp\left(-\frac{m_4 e_1^2}{\Delta_1}\right) \times \\ \times \iiint_V |e_4 e_6 - e_5^2| \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[ \frac{9\Delta_2}{4m_4 \Delta_1} (e_4^2 + e_6^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{m_4} e_5^2 + \frac{3m_2}{\Delta_1} e_1 (e_4 + e_6) - \frac{3\Delta_3}{2m_4 \Delta_1} e_4 e_6 \right] \right\} de_4 de_5 de_6 , \quad (33)$$

для щільності вершин [7, 10]:

$$D = \frac{1}{8p\sqrt{3}} \left( \frac{M_4}{M_2} \right) = \frac{1}{6p\sqrt{3}} \left( \frac{m_4}{m_2} \right), \quad (34)$$

де  $M_2 = m_{20} + m_{02}$  ;

$$M_4 = m_{40} + 2m_{22} + m_{04}$$

та для щільності ймовірностей розподілу висот вершин [12]:

$$p(e'_1) = P_{sum}(e'_1) / D = (2p)^{-1} (3C_1)^{1/2} \times \\ \times \exp\left[-C_1 (e'_1)^2\right] \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{1}{2} (C_1 t^2 + C_2 e'_1 t)\right] dt \times \\ \times \int_0^{-t} (t^2 - r^2) r dr \int_0^{2p} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr = \\ = \frac{\sqrt{3C_1}}{2p} \left[ \left( \frac{1}{C_1} - 2 \right) J_0 + e'_1 \sqrt{\frac{3}{a}} J_1 + 2J_2 \right] = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2p} \left\{ \exp\left[-C_1 (e'_1)^2\right] \sqrt{\frac{3(2a-3)}{a^2}} e'_1 + \right. \\ \left. + \exp\left[-\frac{(e'_1)^2}{2}\right] (1 + erf b) \frac{3\sqrt{2p}}{2a} [(e'_1)^2 - 1] + \right. \\ \left. + \sqrt{2p} \exp\left[-\frac{a(e'_1)^2}{2(a-1)}\right] (1 + erf g) \sqrt{\frac{a}{3(a-1)}} \right\}, \quad (35)$$

де  $C_1 = a/(2a-3)$ ;  $a = m_0 m_4 / m_2^2$ ;  $C_2 = C_1 \sqrt{\frac{12}{a}}$  ;

інтеграли  $J_0, J_1, J_2$  приведені за [10]:

$$J_0 = \sqrt{\frac{p}{2C_1}} \exp\left[-\frac{(e'_1)^2}{2}\right] (1 + erf b);$$

$$J_1 = \frac{1}{C_1} \left\{ \exp\left[-C_1 (e'_1)^2\right] + b\sqrt{p} \exp\left[-\frac{(e'_1)^2}{2}\right] (1 + erf b) \right\};$$

$$J_2 = \sqrt{\frac{p}{2(1+C_1)}} \exp\left[-\frac{a(e'_1)^2}{2(a-1)}\right] (1 + erf g);$$

$$b = e'_1 \sqrt{\frac{3}{2(2a-3)}}; \quad g = e'_1 \sqrt{\frac{a}{2(a-1)(2a-3)}},$$

а інтеграли ймовірностей похибок – за [48]:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \approx \frac{2}{\sqrt{p}} \left( x - \frac{x^3}{3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{x^9}{9} \pm \dots \right);$$

$$erf(\infty) = 1;$$

$$erfc(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_x^\infty \exp(-t^2) dt ,$$

тоді за формулою (32) запишемо співвідношення для математичного сподівання середньої кривини у вершині висотою  $e'_1$  для **ізотропної поверхні** [12]:

$$EK_m(e'_1) = \sqrt{\frac{m_4}{3}} \times \\ \times \left[ \frac{e'_1 \sqrt{\frac{3}{a}} J_0 + \left( \frac{2}{C_1} + \frac{3(e'_1)^2}{a} - 2 \right) J_1 + 2J_3}{\left( \frac{1}{C_1} - 2 \right) J_0 + e'_1 \sqrt{\frac{3}{a}} J_1 + 2J_2} \right]. \quad (36)$$

У формулі (36) інтеграл  $J_3$  приведений за [10]:

$$J_3 = \frac{1}{C_1 + 1} \left\{ \exp\left[-C_1 (e'_1)^2\right] + \right. \\ \left. + g\sqrt{p} (1 + erf g) \exp\left[-\frac{a(e'_1)^2}{2(a-1)}\right] \right\}.$$

Для граничних значень  $\alpha$  математичне сподівання середньої кривини у вершині нано- та мікронерівностей ізотропної поверхні дорівнює:

- для  $\alpha=1,5$   $E\bar{K}_m(e'_1) = e'_1 \sqrt{\frac{2}{3}} m_4$ , (37)

тобто залежність середньої кривини у вершині від нормованої висоти виступів  $e'_1$  є лінійною;

- для  $\alpha \rightarrow \infty$   $E\bar{K}_m(e'_1) = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{m_4}{p}}$ , (38)

тобто середня кривина однакова для всіх нормованих висот вершин.

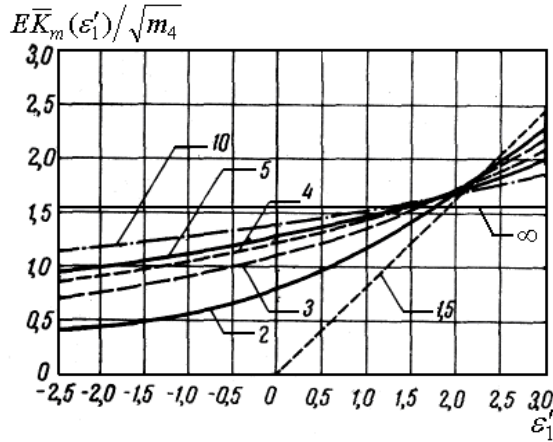
Для нормованої середньої кривини у вершинах нерівностей ізотропної поверхні формули (37) та (38) набувають вигляду:

$$\bullet \text{ для } \alpha=1,5 \quad \frac{EK_m(e'_1)}{\sqrt{m_4}} = e'_1 \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad e'_1 \geq 0; \quad (39)$$

$$\bullet \text{ для } \alpha \rightarrow \infty \quad \frac{EK_m(e'_1)}{\sqrt{m_4}} = \frac{8}{3\sqrt{p}} = 1,504505(5). \quad (40)$$

Співвідношення для середньої кривини у вершинах нерівностей ізотропної поверхні у вершині нано- та мікронерівностей для граничних випадків співпадають з [10].

**6. На рис. 1** приведена залежність нормованої середньої кривини ізотропної поверхні для певних значень параметра широкосмужності СЩ ( $\alpha=1,5; 2; 3; 4; 5; 10; \infty$ ) від нормованої висоти  $e'_1$  [10].



**Рис. 1.** Залежність значення сподівання нормованої середньої кривини у вершинах нано- та мікронерівностей шорсткої ізотропної поверхні твердого тіла при різних значеннях параметра широкосмужності  $\alpha$  від нормованої висоти  $e'_1$  (цифри біля кривих відповідають значенням параметру широкосмужності спектру  $\alpha$ ) [10].

Як видно з рис. 1, високі піки нерівностей шорсткої ізотропної поверхні завжди мають більшу сподівану середню кривину (менший радіус кривини у вершині), ніж низькі піки.

**2.2. Повна кривина у вершинах нано- та мікронерівностей анізотропної та ізотропної шорстких поверхонь твердих тіл.**

**1. Повна кривина  $K$  визначається** через коефіцієнти першої і другої форм Гаусса таким чином [13]:

$$K = \frac{LN - M^2}{QG - F^2}, \quad (41)$$

де величини  $Q, F, G, L, M, N$  можна виразити через змінні  $e_1, \dots, e_6$  [13]:

$$Q = 1 + e_2^2; F = e_2 e_3; G = 1 + e_3^2; L = e_4(1 + e_2^2 + e_3^2)^{-1/2}; \\ M = e_5(1 + e_2^2 + e_3^2)^{-1/2}; N = e_6(1 + e_2^2 + e_3^2)^{-1/2}. \quad (42)$$

Так як у вершинах нано- та мікронерівностей анізотропної шорсткої поверхні вірні співвідношення:

$$e_2 = 0; e_3 = 0; e_4 < 0; e_6 < 0; e_4 e_6 - e_5^2 \geq 0, \quad \text{то} \\ \text{співвідношення (42) перетворюється на } Q=1; F=0; G=1; \\ L=e_4; M=e_5; N=e_6 \text{ і, відповідно, } K = e_4 e_6 - e_5^2 \text{ [13].}$$

**2. При переході до змінних  $e'_1, t, r, j$  :**

$$\left. \begin{aligned} e'_1 &= e_1 m_{00}^{-1/2}; \\ e_4 &= (t + r \cos j) m_{22}^{1/2}; \\ e_5 &= (r \sin j) m_{22}^{1/2}; \\ e_6 &= (t - r \cos j) m_{22}^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

отримаємо вираз для повної кривини [13]:

$$K = m_{22}(t^2 - r^2). \quad (44)$$

**3. Для анізотропної поверхні** значення сподівання повної кривини  $EK(e'_1)$  у вершинах нерівностей з нормованими висотами  $e'_1$  знайдемо таким чином [13]:

$$EK(e'_1) = \frac{m_{22} \iiint (t^2 - r^2) p(e'_1, t, r, j) dt dr dj}{\iiint p(e'_1, t, r, j) dt dr dj} \cdot V_1 \quad (45)$$

А, враховуючи вираз для спільної щільності ймовірностей змінних  $e'_1, t, r, j$ , вираз (45) можна записати таким чином [13]:

$$EK(e'_1) = \frac{m_{22} S(e'_1)}{p(e'_1)}, \quad (46)$$

де  $p(e'_1)$  – щільність ймовірностей розподілу висот вершин анізотропної поверхні для нормованої висоти  $e'_1$  (29);

$S(e'_1)$  – функція, значення якої залежить від нормованої висоти, має вигляд:

$$S(e'_1) = \frac{m_{00}^{1/2} m_{22}^{5/2}}{4p^3 \Delta^{1/2} D} \exp\left[-\frac{\Delta_2 m_{00}}{2\Delta_{12}} (e'_1)^2\right] \times \\ \times \int_{-\infty}^0 \exp(A_1 t^2 + A_7 e'_1 t) dt \int_0^{-t} (t^2 - r^2)^2 r dr \times \\ \times \int_0^{2p} \exp[A_4 r^2 \cos^2 j + A_5 r^2 \cos j \cdot \sin j + \\ + A_6 r^2 \sin^2 j + (A_2 t + A_8 e'_1) r \cos j + \\ + (A_3 t + A_9 e'_1) r \sin j] dj. \quad (47)$$

**4. Для ізотропної шорсткої поверхні** щільність ймовірностей розподілу висот вершин дорівнює (35), а функція  $S(e'_1)$  приймає вигляд [13]:

$$S(e'_1) = \frac{(3C_1)^{1/2}}{(2p)^2} \exp[-C_1(e'_1)^2] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{1}{2}(C_1 t^2 + C_2 e'_1 t)\right] dt \int_0^{-t} (t^2 - r^2) r dr \times$$

$$\times \int_0^{2p} \exp\left(-\frac{1}{2} r^2\right) dj = \frac{(3C_1)^{1/2}}{2p} \left\{ \left[ \frac{3}{C_1^2} + \frac{3(e'_1)^2}{C_1 a} \right] J_0 + \right.$$

$$+ \sqrt{\frac{3}{a}} \left[ \frac{5e'_1}{C_1} + \frac{3(e'_1)^3}{a} \right] J_1 - 4 \left( \frac{1}{C_1} - 2 \right) J_0 -$$

$$\left. - 4e'_1 \sqrt{\frac{3}{a}} J_1 - 8J_2 \right\}. \quad (48)$$

Після перетворень (48), отримуємо для ізотропної поверхні [13]:

$$S(e'_1) = \frac{(3C_1)^{1/2}}{2p} \left\{ \left[ \frac{3}{C_1^2} + \frac{3(e'_1)^2}{C_1 a} \right] J_0 + \right.$$

$$+ \sqrt{\frac{3}{a}} \left[ \frac{5e'_1}{C_1} + \frac{3(e'_1)^3}{a} \right] J_1 - 4 \left( \frac{1}{C_1} - 2 \right) J_0 -$$

$$\left. - 4e'_1 \sqrt{\frac{3}{a}} J_1 - 8J_2 \right\}. \quad (49)$$

Враховуючи вирази (35) і (49) отримаємо вираз для сподівання повної кривини ізотропної поверхні у вершині нерівності з нормованою висотою  $e'_1$  [13]:

$$EK(e'_1) =$$

$$= \frac{m_4 \left[ \left( \frac{3}{C_1^2} + \frac{3(e'_1)^2}{C_1 a} \right) J_0 + \sqrt{\frac{3}{a}} \left( \frac{5e'_1}{C_1} + \frac{3(e'_1)^3}{a} \right) J_1 \right]}{\left[ \left( \frac{1}{C_1} - 2 \right) J_0 + e'_1 \sqrt{\frac{3}{a}} J_1 + 2J_2 \right]} - 4. \quad (50)$$

5. Розглянемо граничні випадки співвідношення (50) для ізотропної поверхні [13], коли:

•  $\alpha=1,5$

$$EK(e'_1) = \begin{cases} \frac{m_4}{3} \left[ \frac{2(e'_1)^4}{(e'_1)^2 + \exp[-(e'_1)^2]} - 4 \right], & e'_1 \geq 0; \\ 0, & e'_1 < 0; \end{cases} \quad (51)$$

•  $\alpha \rightarrow \infty$   $EK(e'_1) = m_4 \left( 2\sqrt{3} - \frac{4}{3} \right). \quad (52)$

Для граничних випадків та нормованої (безрозмірної) повної кривини вершин ізотропної поверхні співвідношення (51) і (52) набувають вигляду:

•  $\alpha=1,5$

$$\frac{EK(e'_1)}{m_4} = \begin{cases} \frac{1}{3} \left[ \frac{2(e'_1)^4}{(e'_1)^2 + \exp[-(e'_1)^2]} - 4 \right], & e'_1 \geq 0; \\ 0, & e'_1 < 0; \end{cases} \quad (53)$$

•  $\alpha \rightarrow \infty$

$$\frac{EK(e'_1)}{m_4} = \left( 2\sqrt{3} - \frac{4}{3} \right) = 2,130768282. \quad (54)$$

У випадку ізотропної поверхні дослідили (рис. 2) [13] залежність сподівання нормованої (безрозмірної) повної кривини вершин  $EK(e'_1)/m_4$  від нормованої (безрозмірної) висоти  $e'_1$  при різних значеннях параметра широкосмужності спектру  $\alpha$ . Як видно з рис. 2, повна кривина ізотропної поверхні збільшується із зростанням нормованої висоти вершин, а із зростанням показника широкосмужності спектру  $\alpha$  швидкість зростання повної кривини зменшується і в граничному наближенні (при  $\alpha \rightarrow \infty$ )  $EK(e'_1)/m_4 = \text{const}$  для всіх  $e'_1$  [13].

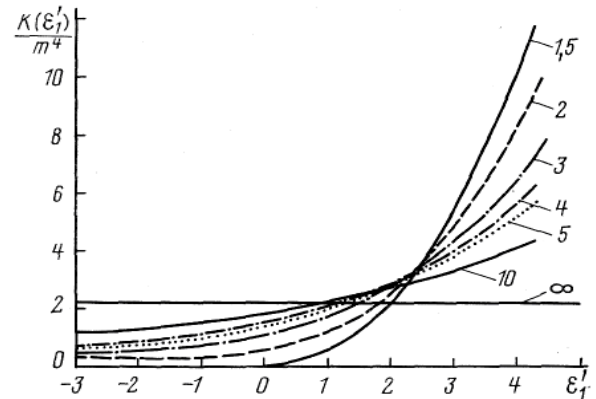


Рис. 2. Залежність сподівання нормованої повної кривини у вершинах нано- та мікронерівностей ізотропної поверхні від нормованої висоти  $e'_1$  (цифри біля кривих відповідають значенням параметру широкосмужності спектру  $\alpha$ ) [13].

### 2.3. Головні кривини у вершинах нано- та мікронерівностей анізотропної та ізотропної шорстких поверхонь твердих тіл. Означення ізотропності.

1. Нехай  $K_1, K_2$  – теоретичні головні кривини, при цьому, без втрати спільності, прийнемо, що  $K_1 \leq K_2$ , а  $l = K_1/K_2$  – теоретичне співвідношення головних кривин.

Експериментально за профілограмами, знятими у двох взаємоперпендикулярних напрямках, що відповідають поздовжній та поперечній шорсткості поверхні, визначають радіуси кривин у вершинах нано- та мікронерівностей та розраховують їх відношення, за якими й приймають головні кривини та їх відношення.

Напрямки, в яких знімають профілограми, складають певний кут  $\theta$  (кут помилки) з дійсно головними напрямками, при цьому емпіричні кривини  $k_1$  і  $k_2$  за формулами Ейлера визначаються так [13]:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= K_1 \cos^2 q + K_2 \sin^2 q \\ k_2 &= K_1 \sin^2 q + K_2 \cos^2 q \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Співвідношення емпіричних головних кривин дорівнює [13]:

$$l_{ekc} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{K_1 \cos^2 q + K_2 \sin^2 q}{K_1 \sin^2 q + K_2 \cos^2 q} = \frac{l + tg^2 q}{l \cdot tg^2 q}, \quad (56)$$

при цьому абсолютна помилка визначення співвідношення головних кривин становить [13]:

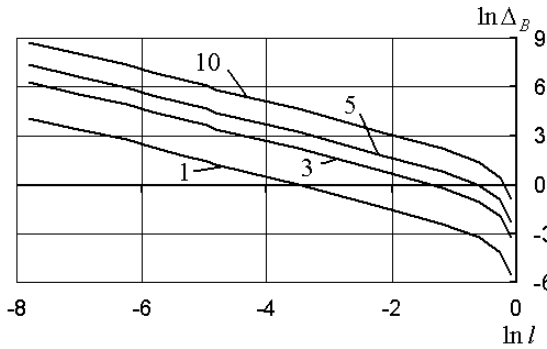
$$\Delta_A = l_{ekc} - l = tg^2 q \frac{1 - l^2}{l \cdot tg^2 q + 1}, \quad (57)$$

а відносна помилка складає [13]:

$$\Delta_B = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1 - l^2}{l} \cdot \frac{tg^2 q}{l \cdot tg^2 q + 1} \cdot 100\%. \quad (58)$$

Ясно, що емпіричні кривини  $k_1$  і  $k_2$  та їх співвідношення  $l_{ekc}$  є лише статистичними оцінками теоретичних кривин  $K_1$  і  $K_2$  та їх співвідношень  $l$ .

На рис. 3 показана зміна логарифму відносної похибки  $\Delta_B$  від логарифму співвідношення головних кривин  $l$  для кута помилки  $\theta=1; 3; 5; 10^0$  за цифровими даними [13].



**Рис. 3.** Зміна логарифму відносної похибки ( $\ln \Delta_B$ ) від логарифму співвідношення головних кривин ( $\ln l$ ) для кута помилки  $\theta=1; 3; 5; 10^0$  (цифри біля кривих відповідають значенням кута похибки  $\theta$ ).

Результати, що представлені на рис. 3, апроксимуються поліномами 6-го порядку в логарифмічних координатах ( $R^2$  – коефіцієнт апроксимації) для кута похибки  $\theta$ :

- $\theta=1^0$   $\ln \Delta_B = -0,0013(\ln l)^6 - 0,0348(\ln l)^5 - 0,3548(\ln l)^4 - 1,7783(\ln l)^3 - 4,5208(\ln l)^2 - 6,3663(\ln l) - 5,7941$  ( $R^2=0,9986$ );
- $\theta=3^0$   $\ln \Delta_B = -0,0013(\ln l)^6 - 0,0338(\ln l)^5 - 0,3441(\ln l)^4 - 1,7202(\ln l)^3 - 4,3618(\ln l)^2 - 6,1713(\ln l) - 3,5176$  ( $R^2=0,9988$ );
- $\theta=5^0$   $\ln \Delta_B = -0,0013(\ln l)^6 - 0,0339(\ln l)^5 - 0,345(\ln l)^4 - 1,725(\ln l)^3 - 4,3743(\ln l)^2 - 6,1867(\ln l) - 2,5004$  ( $R^2=0,9988$ );
- $\theta=10^0$   $\ln \Delta_B = -0,0013(\ln l)^6 - 0,0338(\ln l)^5 - 0,3438(\ln l)^4 - 1,7196(\ln l)^3 - 4,3649(\ln l)^2 - 6,1881(\ln l) - 1,1147$  ( $R^2=0,9988$ );

Як видно з рис. 3, зміна співвідношення головних кривин від  $l \geq 0,030$  (для кута помилки  $\theta=1^0$ ), від  $l \geq 0,303$  (для  $\theta=3^0$ ), від  $l \geq 0,546$  (для  $\theta=5^0$ ), від  $l \geq 0,766$  (для  $\theta=10^0$ ) експериментальний метод дає  $\Delta_B=0,819-1,630\%$ , а за менших  $l$  відносна помилка значно зростає, і тим більше, чим більший кут помилки  $\theta$ : від  $\Delta_B=3,39\%$  до

$\Delta_B=60,94\%$  при зміні  $l=0,008-0,0004$  (для кута помилки  $\theta=1^0$ ); від  $\Delta_B=2,13\%$  до  $\Delta_B=549,3\%$  при зміні  $l=0,126-0,0004$  (для кута помилки  $\theta=3^0$ ); від  $\Delta_B=2,28\%$  до  $\Delta_B=1530,9\%$  при зміні  $l=0,303-0,0004$  (для кута помилки  $\theta=5^0$ ); від  $\Delta_B=3,92\%$  до  $\Delta_B=6218,1\%$  при зміні  $l=0,546-0,0004$  (для кута помилки  $\theta=10^0$ ).

Покажемо метод знаходження головних кривин  $K_1$  і  $K_2$  та відношення головних кривин  $l=K_1/K_2$ , який не зв'язаний з визначенням поздовжнього та поперечного напрямків шорсткості поверхонь і, відповідно, кутом похибки  $\theta$ .

**2. У вершинах нано- та мікронерівностей** будемо мати [13]:

- для середньої кривини за формулою (12):

$$\bar{K}_m = -m_{22}^{1/2} t;$$

- для повної кривини за формулою (44):

$$K = m_{22} (t^2 - r^2),$$

де  $m_{22}$  – момент четвертого порядку спектральної щільності анізотропної поверхні при  $p=2, q=2$  [8, 10, 12];

$t, p, \phi$  – змінні, які пов'язані з  $e_4 = \partial^2 z / \partial x^2$ ;

$e_5 = \partial^2 z / \partial x \partial y$ ;  $e_6 = \partial^2 z / \partial y^2$  співвідношеннями [12, 13, 36].

**3. Використовуючи відоме співвідношення** [13, 30, 50] між повною  $K$ , середньою  $\bar{K}_m$  і головними кривинами  $K_1, K_2$  для вершин нано- та мікронерівностей, отримуємо [13]:

$$\begin{aligned} \bullet K_1 &= \bar{K}_m - \sqrt{\bar{K}_m^2 - K} = \bar{K}_m - m_{22}^{1/2} r = \\ &= -m_{22}^{1/2} t - m_{22}^{1/2} r = -m_{22}^{1/2} (t + r); \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \bullet K_2 &= \bar{K}_m + \sqrt{\bar{K}_m^2 - K} = \bar{K}_m + m_{22}^{1/2} r = \\ &= -m_{22}^{1/2} t + m_{22}^{1/2} r = m_{22}^{1/2} (t - r); \end{aligned} \quad (60)$$

$$\bullet l = \frac{H_1}{H_2} = \frac{t + r}{t - r}. \quad (61)$$

**4. Головні кривини і відношення головних кривин** анізотропної поверхні у вершині нано- та мікронерівностей висотою  $e'_1$  визначається так [13, 30, 50]:

$$\begin{aligned} \bullet K_1(e'_1) &= \bar{K}_m(e'_1) - \\ &\frac{\iiint_V r p(e'_1, t, r, j) dt dr dj}{\iiint_{V_1} p(e'_1, t, r, j) dt dr dj}; \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \bullet K_2(e'_1) &= \bar{K}_m(e'_1) + \\ &\frac{\iiint_V r p(e'_1, t, r, j) dt dr dj}{\iiint_{V_1} p(e'_1, t, r, j) dt dr dj}; \end{aligned} \quad (63)$$



$$\bullet l(e'_1) = \frac{\iiint_{V_1} \left( \frac{t+r}{t-r} \right) p(e'_1, t, r, j) dt dr dj}{\iiint_{V_1} p(e'_1, t, r, j) dt dr dj}, \quad (64)$$

де об'єм (простір) інтегрування  $V_1(t, \rho, \varphi)$  визначається нерівностями [12, 36]:

$$\begin{cases} t < 0 \\ 0 \leq r \leq -t \\ 0 \leq j \leq 2p. \end{cases}$$

Або ці величини визначаються так [13]:

$$\bullet K_1(e'_1) = \bar{K}_m(e'_1) - m_{22}^{1/2} \frac{T(e'_1)}{p(e'_1)}; \quad (65)$$

$$\bullet K_2(e'_1) = \bar{K}_m(e'_1) + m_{22}^{1/2} \frac{T(e'_1)}{p(e'_1)}; \quad (66)$$

$$\bullet l(e'_1) = \frac{W(e'_1)}{p(e'_1)}, \quad (67)$$

де функції  $T(e'_1)$  і  $W(e'_1)$  визначаються таким чином [13]:

$$\begin{aligned} \bullet T(e'_1) &= \frac{m_{00}^{1/2} m_{22}^{5/2}}{4p^3 \Delta^{1/2} D} \exp \left[ -\frac{\Delta_2 m_{00}}{2\Delta_{12}} (e'_1)^2 \right] \times \\ &\times \int_{-\infty}^0 \exp(A_1 t^2 + A_7 e'_1 t) dt \int_0^{-t} (t^2 - r^2) r^2 dr \times \\ &\times \int_0^{2p} \exp[A_4 r^2 \cos^2 j + A_5 r^2 \cos j \sin j + \\ &+ A_6 r^2 \sin^2 j + (A_2 t + A_8 e'_1) r \cos j + \\ &+ (A_3 t + A_9 e'_1) r \sin j] dj; \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \bullet W(e'_1) &= \frac{m_{00}^{1/2} m_{22}^{5/2}}{4p^3 \Delta^{1/2} D} \exp \left[ -\frac{\Delta_2 m_{00}}{2\Delta_{12}} (e'_1)^2 \right] \times \\ &\times \int_{-\infty}^0 \exp(A_1 t^2 + A_7 e'_1 t) dt \int_0^{-t} (t+r)^2 r dr \times \\ &\times \int_0^{2p} \exp[A_4 r^2 \cos^2 j + A_5 r^2 \cos j \sin j + \\ &+ A_6 r^2 \sin^2 j + (A_2 t + A_8 e'_1) r \cos j + \\ &+ (A_3 t + A_9 e'_1) r \sin j] dj, \end{aligned} \quad (69)$$

де  $\Delta, \Delta_{12}, \Delta_1, \dots, \Delta_9$  – визначники [12, 36];

$D$  – щільність вершин [7, 10];

$A_1, \dots, A_9$  – вирази [12, 36].

**5. Для ізотропної поверхні вирази для функцій  $T(e'_1)$  (68) та  $W(e'_1)$  (69) набувають такого вигляду [13]:**

$$\begin{aligned} \bullet T(e'_1) &= \frac{(3C_1)^{1/2}}{(2p)^2} \exp[-C_1 (e'_1)^2] \times \\ &\times \int_{-\infty}^0 \exp \left[ -\frac{1}{2} (C_1 t + C_2 e'_1 t) \right] dt \times \end{aligned} \quad (70)$$

$$\times \int_0^{-t} (t^2 - r^2) r^2 dr \int_0^{2p} \exp \left( -\frac{1}{2} r^2 \right) dj;$$

$$\begin{aligned} \bullet W(e'_1) &= \frac{(3C_1)^{1/2}}{(2p)^2} \exp[-C_1 (e'_1)^2] \times \\ &\times \int_{-\infty}^0 \exp \left[ -\frac{1}{2} (C_1 t + C_2 e'_1 t) \right] dt \times \end{aligned} \quad (71)$$

$$\times \int_0^{-t} (t+r)^2 r dr \int_0^{2p} \exp \left( -\frac{1}{2} r^2 \right) dj.$$

Після інтегрування (70), (71) отримаємо:

$$\bullet T(e'_1) = \frac{\sqrt{3C_1}}{2p} \left[ \sqrt{\frac{p}{2}} J_4 + 3J_3 \right]; \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \bullet W(e'_1) &= \frac{\sqrt{3C_1}}{2p} \left[ \left( \frac{1}{C_1} + 2 \right) J_0 + \right. \\ &\left. + e'_1 \sqrt{\frac{3}{a}} J_1 - 2J_2 + \sqrt{2p} J_5 \right], \end{aligned} \quad (73)$$

де інтеграли  $J_0, J_1, \dots, J_5$  приведені за [10, 12, 13, 36]:

$$\bullet J_0 = \sqrt{\frac{p}{2C_1}} \exp \left[ -\frac{(e'_1)^2}{2} \right] (1 + \operatorname{erfb}); \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \bullet J_1 &= \frac{1}{C_1} \left\{ \exp[-C_1 (e'_1)^2] + \right. \\ &\left. + b\sqrt{p} \exp \left[ -\frac{(e'_1)^2}{2} \right] (1 + \operatorname{erfb}) \right\}; \end{aligned} \quad (75)$$

$$\bullet J_2 = \sqrt{\frac{p}{2(1+C_1)}} \exp \left[ -\frac{a(e'_1)^2}{2(a-1)} \right] (1 + \operatorname{erfg}); \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \bullet J_3 &= \frac{2}{C_1^2} \left\{ \exp[-C_1 (e'_1)^2] (1 + b^2) + \right. \\ &\left. + \sqrt{p} \exp \left[ -\frac{(e'_1)^2}{2} \right] (1 + \operatorname{erfb}) (b^3 + 3b/2) \right\}; \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \bullet J_4 &= \exp[-C_1 (e'_1)^2] \int_{-\infty}^0 (t^2 - 3) \times \\ &\times \operatorname{erf} \left( -\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \exp \left[ -\frac{1}{2} (C_1 t^2 + C_2 e'_1 t) \right] dt; \end{aligned} \quad (78)$$

$$\bullet J_5 = \exp\left[-C_1(e_1')^2\right] \int_{-\infty}^0 t \cdot \operatorname{erf}\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2}(C_1 t^2 + C_2 e_1' t)\right] dt, \quad (79)$$

де  $C_1 = a/(2a-3)$ ;  $a = m_0 m_4 / m_2^2$ ;  $C_2 = C_1 \sqrt{\frac{12}{a}}$ .

**6. Виходячи з виразів (12), (14), (59) – (79) та виразів для  $p(e_1')$  і  $K_m(e_1')$  для ізотропної поверхні [12, 13, 36] вирази для головних кривин і співвідношення головних кривин у вершині нано- та мікронерівностей ізотропної поверхні будуть мати вигляд [13]:**

$$\bullet K_1(e_1') = \sqrt{\frac{m_4}{3}} \times \\ \times \left[ \frac{e_1' \sqrt{\frac{3}{a}} J_0 + \left(\frac{2}{C_1} + \frac{3(e_1')^2}{a} - 2\right) J_1 - J_3 - \sqrt{\frac{p}{2}} J_4}{\left(\frac{1}{C_1} - 2\right) J_0 + e_1' \sqrt{\frac{3}{a}} J_1 + 2J_2} \right]; \quad (80)$$

$$\bullet K_2(e_1') = \sqrt{\frac{m_4}{3}} \times \\ \times \left[ \frac{e_1' \sqrt{\frac{3}{a}} J_0 + \left(\frac{2}{C_1} + \frac{3(e_1')^2}{a} - 2\right) J_1 + 5J_3 + \sqrt{\frac{p}{2}} J_4}{\left(\frac{1}{C_1} - 2\right) J_0 + e_1' \sqrt{\frac{3}{a}} J_1 + 2J_2} \right]; \quad (81)$$

$$\bullet I(e_1') = \frac{\left(\frac{1}{C_1} + 2\right) J_0 + e_1' \sqrt{\frac{3}{a}} J_1 - 2J_2 + \sqrt{2p} J_5}{\left(\frac{1}{C_1} - 2\right) J_0 + e_1' \sqrt{\frac{3}{a}} J_1 - 2J_2}, \quad (82)$$

де  $m_4 = 3m_{22} = m_{40} = m_{04}$  – момент четвертого порядку спектральної щільності ізотропної поверхні [10, 36].

**7. Визначимо ці величини для ізотропної поверхні при  $\alpha \rightarrow \infty$  за (80) – (82), тоді інтеграли  $J_4, J_5$  приймають вигляд [13]:**

$$\bullet J_4 = \exp\left[-\frac{1}{2}(e_1')^2\right] \int_{-\infty}^0 (t^2 - 3) \operatorname{erf}\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{4}t^2\right] dt = \exp\left[-\frac{1}{2}(e_1')^2\right] \times \\ \times 2\sqrt{\frac{2}{p}} \left(\frac{2}{3} - \frac{p}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccctg}\sqrt{2}\right); \quad (83)$$

$$\bullet J_5 = \exp\left[-\frac{1}{2}(e_1')^2\right] \int_{-\infty}^0 t \cdot \operatorname{erf}\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{4}t^2\right] dt = -2\sqrt{\frac{2}{3}} \exp\left[-\frac{1}{2}(e_1')^2\right]. \quad (84)$$

Тоді, формули для розрахунку нормованих (безрозмірних) головних кривин і співвідношення головних кривин для ізотропної поверхні за (80) – (82) набувають вигляду [13]:

• при  $\alpha \rightarrow \infty$ :

$$\frac{K_1(e_1')}{\sqrt{m_4}} = \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2p}} \operatorname{arccctg}\sqrt{2}; \quad (85)$$

$$\frac{K_2(e_1')}{\sqrt{m_4}} = \frac{13}{3\sqrt{p}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2p}} \operatorname{arccctg}\sqrt{2}, \quad (86)$$

за (85), (86)

$$l(e_1') = \frac{K_1(e_1')}{K_2(e_1')} = 2\sqrt{3} - 3 \approx 0,464101615 < 1; \quad (87)$$

• при  $\alpha = 1,5$  співвідношення головних кривин дорівнює:

$$l(e_1') \approx 0,333(3) \dots < 1. \quad (88)$$

**8. Крім того, проведемо оцінку математичного сподівання співвідношення головних кривин  $El(e_1')$  за двома формулами:**

**1) замінюючи у виразах (59) – (61) величини  $K_1, K_2, K$  їх математичними сподіваннями, тоді при  $\alpha \rightarrow \infty$  будемо мати [13]:**

$$E\bar{l}(e_1') \approx \frac{EK_m(e_1') - \sqrt{[EK_m(e_1')]^2 - EK(e_1')}}{EK_m(e_1') + \sqrt{[EK_m(e_1')]^2 - EK(e_1')}} \approx \\ \approx 0,600 < 1, \quad (89)$$

де  $E$  – символ математичного сподівання;

**2) замінюючи у виразах (62) – (64) величини  $K_1$  і  $K_2$  їх математичними сподіваннями  $EK_1(e_1')$  і  $EK_2(e_1')$ , тоді при  $\alpha \rightarrow \infty$  будемо мати:**

$$El(e_1') \approx \frac{EK_1(e_1')}{EK_2(e_1')} \approx 0,458 \dots < 1. \quad (90)$$

**2.4. Означення ізотропності нано- та мікрошорстких поверхонь твердих тіл.**

**1. Існує дві точки зору на поняття ізотропності поверхонь:** 1) при статистичній оцінці шорстку ізотропну поверхню визначають як поверхню, яка змодельована у вигляді набору сфер [51 – 59]; 2) у низці робіт [2, 3, 60] розуміють ізотропність в тому смислі, як вона визначена в теорії випадкового поля.

**2. У теорії випадкового поля  $z = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ізотропним прийнято називати поле, автокореляційна функція  $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  [1, 10, 12, 36] якого залежить лише від змінної  $\mathbf{r} = (\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2)^{1/2}$  і не залежить від полярного кута  $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$ , а спектральна щільність  $\Phi(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y)$  [1, 10, 12, 36] залежить тільки від змінної  $\mathbf{k} \equiv \left| \begin{matrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{k} \end{matrix} \right|$  [3].**

За теорією випадкового поля, ізотропна поверхня уявляє собою поверхню, яка змодельована виступами, що відрізняються головними кривинами у вершинах нано- та мікронерівностей (наприклад, цю умову задовольняє еліпсоїдна модель), причому розподіл кута повороту виступів є рівномірним [3]. При такому означенні ізотропності на форму нано- та мікронерівностей не накладаються **a priori** певні обмеження.

**3. Ці два означення ізотропності** не є тотожними. Поверхня може бути змодельована набором сфер, а автокореляційна функція  $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  при цьому буде залежати від полярного кута  $\theta$ .

**4. Із означення ізотропності** за ідеальною сферичною моделлю витікає, що для ізотропної поверхні головні кривини та співвідношення головних кривин дорівнюють:

$$K_1(e'_1) = K_2(e'_1); \quad (91)$$

$$l(e'_1) = \frac{K_1(e'_1)}{K_2(e'_1)} = 1. \quad (92)$$

**5. За теорію випадкового поля для ізотропної моделі:**

а) за виразами (85) – (88) співвідношення головних кривин дорівнює:

- при  $\alpha \rightarrow \infty$   $l(e'_1) \approx 0,464... < 1$ ;

- при  $\alpha = 1,5$   $l(e'_1) \approx 0,333... < 1$ ;

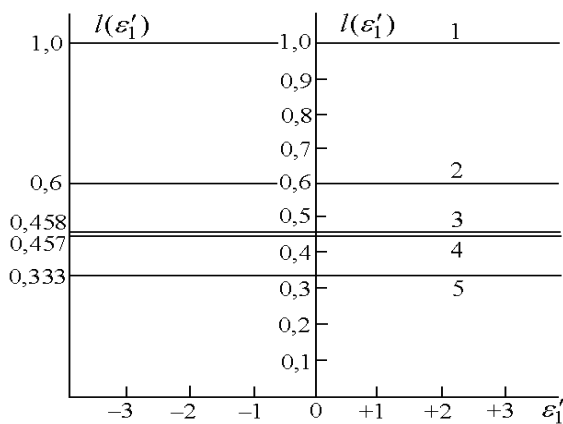
б) за виразом (89):

- при  $\alpha \rightarrow \infty$   $El(e'_1) \approx 0,600... < 1$ ;

в) за виразом (90):

- при  $\alpha \rightarrow \infty$   $El(e'_1) \approx 0,458... < 1$ .

**6. Таким чином, ідеальна сферична модель** ізотропної поверхні, передбачаючи, що всі вершини нано- та мікрорівностей мають вигляд сфер, приводить до співвідношення головних кривин  $l(e'_1) = 1$ , а для ізотропної поверхні, змодельованої випадковим полем, отримуємо  $l(e'_1) = (0,333 - 0,600) < 1$  (рис. 4).



**Рис. 4.** Залежність математичного сподівання співвідношення головних кривин у вершині від нормованої висоти нано- та мікрорівностей ізотропної поверхні твердого тіла, описаної ідеальною сферичною моделлю (1) та моделлю випадкового поля (2-5) при широкосмужності спектру  $\alpha \rightarrow \infty$  (2-4) та  $\alpha = 1,5$  (5).

**7. Ці результати доводять, що в моделі шорсткої** поверхні у вигляді ізотропного випадкового поля немає місця сферичній моделі. У той же час теорія випадкового поля не відкидає того положення, що окремі вершини ізотропної поверхні можуть мати вигляд сфер, але показує, що всі вершини одночасно не можуть бути сферами.

Величину  $l(e'_1)$  можна отримати осередненням величин  $l_i(e'_1)$ , де  $l_i(e'_1)$  – співвідношення головних

кривин в  $i$ -тій вершині висотою  $e'_{1i}$ . Ясно, що  $l(e'_1)$  дорівнює одиниці тільки в тому випадку, коли всі  $l_i(e'_1) = 1$ . Так як  $l(e'_1) < 1$ , то ізотропна поверхня, що змодельована випадковим полем, має вершини, для яких  $l_i(e'_1) < 1$ , тобто має місце наявність несферичних виступів, наприклад еліпсоїдних.

## Висновки

1. Використовуючи теорію випадкового поля для опису шорстких поверхонь твердих тіл, отримані математичні співвідношення для середньої, повної та головних кривин у вершинах нано- та мікрорівностей, при цьому із формул для анізотропної поверхні витікають співвідношення для ізотропної поверхні.

2. Показано, що при граничних значеннях показника широкосмужності спектру ( $\alpha$ ) ізотропної шорсткої поверхні спостерігається або лінійна залежність середньої кривини у вершині від нормованої висоти вершин при гранично вузькому спектрі ( $\alpha=1,5$ ), або середня кривина у вершині однакова для всіх нормованих висот вершин при гранично широкому спектрі ( $\alpha \rightarrow \infty$ ), а для величини нормованої середньої кривини у вершині спостерігається залежність або лише від одного параметра нормованої висоти (для вузького спектру:  $\alpha=1,5$ ), або ця кривина є сталою і дорівнює 1,5045... (для широкого спектру:  $\alpha \rightarrow \infty$ ). Високі піки нано- та мікрорівностей ізотропної шорсткої поверхні завжди мають більшу кривину, ніж низькі піки.

3. У випадку ізотропної шорсткої поверхні повна кривина у вершині нано- та мікрорівностей збільшується із зростанням нормованої висоти вершин, а із зростанням показника широкосмужності спектру ( $\alpha$ ) швидкість зростання повної кривини у вершині зменшується, при цьому при граничних значеннях показника широкосмужності спектру ( $\alpha$ ) нормована повна кривина у вершині залежить або лише від одного параметра – нормованої висоти (для вузького спектру:  $\alpha=1,5$ ), або є сталою і дорівнює 2,1307... (для широкого спектру:  $\alpha \rightarrow \infty$ ).

4. Нормовані головні кривини у вершинах нано- та мікрорівностей ізотропної шорсткої поверхні є сталими величинами.

5. Ідеальна сферична модель в загальному випадку не має місця під час моделювання нано- та мікрорівностей поверхні ізотропним випадковим полем, бо завжди, поруч зі сферичними виступами, має місце наявність несферичних виступів. Цей факт необхідно враховувати під час опису фізико-хімічних явищ і процесів, які відбуваються на нано- та мікрорівностях поверхнях твердих тіл.

**Сіренко Г.О.** – професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри теоретичної і прикладної хімії;  
**Семенюк М.Ф.** – професор, доктор технічних наук, професор кафедри машинознавства;  
**Солтис Л.М.** – аспірант кафедри теоретичної і прикладної хімії.

- [1] Г.О. Сіренко, Л.М. Солтис. Моделі нанометричної та мікрометричної шерсткості поверхні твердих тіл (Огляд) // *Фізика і хімія твердого тіла*, **11** (2), сс. 423-446 (2010).
- [2] М.И. Ядренко. *Спектральная теория случайных полей*. Вища шк., Киев. 208 с. (1980).
- [3] А.П. Хусу, Ю.Р. Виттенберг, В.А. Пальмов. *Шероховатость поверхностей. Теоретико-вероятностный подход*. Наука, Москва. 344 с. (1975).
- [4] М.С. Лонге-Хиггинс. Статистическая геометрия случайных поверхностей // *Гидродинамическая неустойчивость*. Мир, Москва. сс. 124-167 (1964).
- [5] M.S. Longuet-Higgins. On the statistical distribution of the highs of sea waves // *J. Marine Research*, **11** (3), p. 245 (1952).
- [6] M.S. Longuet-Higgins. Statistical Properties of a moving waveform // *Proc. Cambridge Philos. Soc. London*, (52), p. 234 (1956).
- [7] M.S. Longuet-Higgins. Statistical Properties of an isotropic random surface // *Philos. Trans. of the Royal Soc. London*, **250** (Ser. A), pp. 157-174 (1957).
- [8] M.S. Longuet-Higgins. The Statistical Analysis of a Random Moving Surface // *Philos. Trans. of the Royal Soc. London*, **249** (Ser. A), pp. 321-387 (1957).
- [9] M.S. Longuet-Higgins. The Statistical distribution of the curvature of a random Gaussian surface // *Proc. Cambridge Philos. Soc. London*, (54), p. 439 (1958).
- [10] П.Р. Найяк. Применение модели случайного поля для исследования шероховатых поверхностей // *Проблемы трения и смазки*, **93** (Ser. F, 3), сс. 85-95 (1971).
- [11] С.Б. Айнбиндер, Э.Л. Тюнина. *Введение в теорию полимеров*. Зинатне, Рига. 224 с. (1978).
- [12] Н.Ф. Семенюк, Г.А. Сіренко. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 1. Распределение высот вершин, средняя кривизна в вершинах, градиент поверхности // *Трение и износ*, **1** (3), сс. 465-471 (1980).
- [13] Н.Ф. Семенюк, Г.А. Сіренко. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 2. Полная кривизна, главные кривизны и отношение главных кривизн в вершинах микронеровностей, удельная площадь гауссовской поверхности и удельный объем зазора // *Трение и износ*, **1** (5), сс. 815-823 (1980).
- [14] Н.Ф. Семенюк, Г.А. Сіренко. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 3. Фактическая площадь контакта, коэффициент трения, термическое сопротивление, адгезионное взаимодействие с учетом деформации в зоне контакта // *Трение и износ*, **1** (6), сс. 1010 – 1019 (1980).
- [15] Г.О. Сіренко, М.Ф. Семенюк. Залежність зношування карбопластиків від шерсткості спряжених поверхонь, які змодельовані анизотропним випадковим полем // Аннот. допов. I-го Міжнарод. симпозиуму “Фізико-хімічна механіка композиційних матеріалів”. – Івано-Франківськ, 15-19.02.1993, Івано-Франк.: Прикарп. ун-т, сс. 53-54 (1993).
- [16] G. Sirenko, M. Semenyuk. Surface Phenomena on Rough Mating Surfaces Modelled by an Anisotropic Random Fields // Abstracts, information and participants Ukrainian-French Symposium “*Condensed Matter: Science and Industry*”. – Lviv, 20-27 February 1993. IPhCS NANU, Lviv. p. 60 (1993).
- [17] Г.А. Сіренко, Н.Ф. Семенюк. Методика определения моментов спектральной плотности шероховатых поверхностей уплотнительной пары // *Тез. докл. 3-го Всесоюз. совещания по уплотнительной технике*, ВНИИкомпрессормаш, Сумы, сс. 46-47 (1982).
- [18] Н.Ф. Семенюк, Г.А. Сіренко. Топография и контактные явления анизотропных шероховатых поверхностей трения // Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конфер. «Трибоника и антифрикционное материаловедение». – Новочеркасск. 27-29.05.1980. Изд-во Новочеркас. политех. ин-та, Новочеркасск, сс. 22-23 (1980).
- [19] Г. Сіренко, М. Семенюк. Адгезія з деформацією в зоні контакту анизотропних шерстких поверхонь, змодельованих випадковим полем // *Вісник Прикарп. ун-ту ім. В. Стефаника. Сер. Хімія*, (I), сс. 66-85 (2001).
- [20] О.В. Романишина. Исследования предварительного смещения упругого контакта шероховатых изотропных поверхностей: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.04, Хмельницкий, 178 с. (1998).
- [21] О.В. Романишина, Н.Ф. Семенюк. Предварительное смещение единичного выступа при различных режимах нагружения // *Проблемы трибологии*, (2), сс. 35-51 (1997).
- [22] Н.Ф. Семенюк, Н.К. Бачинская. Слияние пятен контакта при нагружении шероховатых, сильно анизотропных поверхностей // *Проблемы трибологии*, (3), сс. 103-107 (1998).
- [23] Н.Ф. Семенюк. Исследования топографии поверхностей методом случайного поля и разработка расчетных методов оценки фактической площади контакта при трении твердых тел: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.04. – Якутск: Ин-т физико-техн. проблем Севера СО ЯФ АН СССР. 149 с. (1983).
- [24] Н.Ф. Семенюк, Г.С. Калда, Е.С. Соколан. Использование метода случайных полей при расчете параметров шероховатости, влияющих на тепловые процессы в трущихся телах // *Проблемы трибологии*, (1), (1996).
- [25] Н.Ф. Семенюк, Т.Ф. Калмыкова. Фактическая площадь упругого контакта анизотропной шероховатой поверхности с гладкой // *Трение и износ*, **4** (3), сс. 467-475 (1983).

- [26] Н.Ф. Семенюк, О.В. Романишина. Предварительное смещение шероховатых изотропных поверхностей. I // *Проблемы трибологии*, (4), сс. 90-101 (1997).
- [27] Н.Ф. Семенюк, О.В. Романишина. Рассеяние энергии на единичном контакте в режиме предварительного смещения // *Проблемы трибологии*, (2), сс. 52-56 (1997).
- [28] Н.Ф. Семенюк, К.С. Соколан. Кривизна в вершинах выступів поверхонь тертя поршневих ущільнень // *Проблеми трибології*, (2), (2000).
- [29] Н.Ф. Семенюк, Е.С. Соколан. Основное уравнение контактирования элементов бесшмазочных поршневых уплотнений // *Проблемы трибологии*, (1), (2002).
- [30] Н.Ф. Семенюк. Средние значения полной и средней кривизны в вершинах, высоты неровностей анизотропной шероховатой поверхности // *Трение и износ*, 7 (5), сс. 830-840 (1986).
- [31] Н.Ф. Семенюк. Средняя высота выступов шероховатой поверхности и плотность пятен контакта при контактировании шероховатой поверхности с гладкой // *Трение и износ*, 7 (1), сс. 85-90 (1986).
- [32] Н.Ф. Семенюк, Е.В. Терлецкая. Моделирование шероховатых изотропных поверхностей. Сообщение I // *Проблемы трибологии*, (1), сс. 83-89 (1998).
- [33] Н.Ф. Семенюк, Е.В. Терлецкая. Моделирование шероховатых изотропных поверхностей. Сообщение II // *Проблемы трибологии*, (1), сс. 90-97 (1998).
- [34] Е.В. Терлецкая. Исследование характеристик фрикционного упругого контакта шероховатых изотропных поверхностей: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.03, Хмельницкий, 195 с. (1996).
- [35] О.Г. Тимошук, Н.Ф. Семенюк. Результаты исследования длительности натекания газа в бесшмазочных цилиндро-поршневых уплотнениях // *Проблемы трибологии*, (2), (2002).
- [36] Г.О. Сіренко, М.Ф. Семенюк, Л.М. Солтис. Щільність ймовірностей розподілу висот вершин шорстких поверхонь твердих тіл, змодельованих випадковим полем // *Фізика і хімія твердого тіла*, 11 (3), сс. 768-779 (2010).
- [37] Г.О. Сіренко, Л.М. Солтис. Антифрикційні властивості карбопластика під час тертя по шорсткій ізотропній поверхні сталі 45 без мащення // *Матеріали П'ятої Міжнародної науково-технічної web-конференції «Композиційні матеріали»* - Київ, травень 2010 р., Київ, сс. 102-103 (2010).
- [38] Г.О. Сіренко, Л.М. Солтис, Л.В. Базюк. Утворення та властивості поверхневих плівок під час фрикційного контакту пари полімерний композит – метал // *Матеріали XII Міжнародної конференції «Фізика і технологія тонких плівок та наносистем»*. – 18-23 травня 2009 року, м. Івано-Франківськ, Україна, Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника, 2, сс. 261-264 (2009).
- [39] Г.О. Сіренко. Вплив анізотропної шорсткості на контактні явища // *Тези допов. Звітної наукової конференції Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника за 2002 р.* – Серія “Хімія”. – 15-23.04.2003р., Івано-Франківськ: Прикарп. ун-т ім. В. Стефаника, сс. 19-21 (2003).
- [40] Г.А. Сиренко. Осложнение контактных явлений поверхности уплотнительных материалов анизотропной микрошероховатости // *Тез. докл. 3-го Всесою. совещания по уплотнительной технике*. ВНИИкомпрессормаш, Сумы, сс. 44 – 45 (1982).
- [41] Г.О. Сіренко. Дослідження залежності інтенсивності зношування ХМА – карбопластиків від моментів спектральної густини спряженої шорсткої поверхні // *Наук. зб: «Всеукр.наук. та проф. тов-ва ім. М. Міхновського»*, Київ, (10), сс. 24-34 (1998).
- [42] Г.О. Сіренко. Дослідження топографії спряжених поверхонь ХМА – карбопластик–сталь // *Наук.зб: «Всеукр.наук. та проф. тов-ва ім. М. Міхновського»*, Київ, (10), сс. 34-45 (1998).
- [43] Г. Сіренко, М. Кедик. Вплив анізотропної шорсткості поверхонь, змодельованих випадковим полем, на контактні явища // *Вісник Прикарп. ун-ту ім. В. Стефаника. Сер. Хімія*, (IV), сс. 50-53 (2004).
- [44] Г.О. Сіренко, Л.М. Солтис. Трибоповерхневі властивості карбопластика під час тертя по шорсткій ізотропній поверхні сталі 45 без мащення // *Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника. Сер. Хімія*, (VII), сс. 104-106 (2009).
- [45] Г.О. Сіренко, Л.М. Солтис. Трибоповерхневі властивості карбопластика під час тертя по шорсткій ізотропній металевій поверхні в дистильованій воді // *Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника. Сер. Хімія*, (VIII), сс. 99-101 (2009).
- [46] Г.О. Сіренко, О.В. Кузишин, Л.Я. Мідак. Оцінка розподілу мікронерівностей на поверхні твердого тіла // *Тези доповід. Четвертої міжнародної науково-практичної конференції «Розвиток наукових досліджень 2008»*. – м. Полтава, 24-26 листопада 2008 р., ІнтерГрафіка, Полтава, 7, сс. 38-41 (2008).
- [47] Г.Б. Двайт. *Таблицы интегралов и другие математические формулы*. – Изд. второе, исп. / Пер. с англ. Н.В. Леви; под. ред. К.А. Семендяева. Наука, Москва. 228 с. (1966).
- [48] Г. Корн, Т. Корн. *Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы*. – изд. 4-е / Пер. с англ. И.Г. Арамановича, А.М. Березмана, И.А. Вайнштейна и др. Наука, Москва. 832 с. (1978).
- [49] I. Sokolnikoff. *S // Tensor Analysis*. – Wiley, New York, pp. 190 (1964).
- [50] Н.Ф. Семенюк. Плотность вероятности высот вершин. Характеристики вершин анизотропной шероховатой поверхности // *Трение и износ*, 7 (6), сс. 1017-1024 (1986).
- [51] Н.Б. Демкин. Геометрия и механика контактирования шероховатых тел // *Теория трения, износа и проблемы стандартизации*. Брянское книжное изд-во, Брянск. с. 274 (1978).
- [52] Н.Б. Демкин. *Контактирование шероховатых поверхностей*. Наука, Москва. 227 с. (1970).

- [53] В.А. Журавлев. К вопросу о теоретическом обосновании закона Амонтона-Кулона для трения несмазанных поверхностей // *Журнал технической физики*, **10** (17), с. 1447 (1940).
- [54] И.В. Крагельский, М.Н. Добычин, В.С. Комбалов. *Основы расчетов на трение и износ*. Машиностроение, Москва. 526 с. (1977).
- [55] J.E. Archard. Elastic Deformation and the Contact of Surfaces // *Nature*, (192), p. 918 (1951).
- [56] J.E. Archard. Elastic Deformation and the laws of friction // *Proc. Roy. Soc.*, **243** (A, 1233), p. 190 (1957).
- [57] J.A. Greenwood, J.B.P. Williamson. Contact of Nominally Flat Surfaces // *Proceedings of the Royal Society*, **295** (A, 1442), p. 300 (1966).
- [58] A.S. Longe, H.G. Howell. Friction of Elastic Solids // *The Proceedings of the Physical Society*, **67** (410), P. 89 (1954).
- [59] A. Schallamach. The Load Dependence of Rubber Friction // *The Proceedings of the Physical Society*, **65** (B), p. 647 (1952).
- [60] A.A. Khmyl, A.P. Dostanko, V.G. Anisimovich, S.A. Chizhik. Effect of polishing on steel surface roughness and contact performance // *Friction and wear*, **18** (4), pp. 491-496 (1996).

Н.О. Sirenko<sup>1</sup>, М.Ф. Semenyuk<sup>2</sup>, L.M. Soltys<sup>1</sup>

## Allocation of Curvatures in Peaks of Micro- and Nanoinequalities of Rough Surfaces of Solid States Modeled by Random Field

<sup>1</sup>Vasyl Stefanyk' Precarpathian National University,  
57, Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk, 76025, Ukraine  
Tel. (0342) 77.64.15; (096) 813.93.53, e-mail: [sirenkog@rambler.ru](mailto:sirenkog@rambler.ru)  
<sup>2</sup>Khmelnitsky National University,  
11, Instytutska Str., Khmelnytsky, 29016, Ukraine

The mathematical description of anisotropic rough surfaces of solid states has been resulted using the model of random field. It has been shown that from formulas for average, absolute, main curvatures and correlation of main curvatures in peaks of nano- and microinequalities of anisotropic surface follow formulas for isotropic surface.

**Key words:** microinequalities, nanoinequalities, mathematical expectation, average curvature, absolute curvature, main curvatures, correlation of main curvatures, mathematical model, physical model, solid state, rough surface, contact phenomena, anisotropic surface, isotropic surface, random field.