

Д.М. Фреїк, В.І. Голота

Аналіз сплеск-перетворень і їх прикладне застосування (огляд)

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
76025, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 79 тел.: 58-32-51, E-mail: kre@pu.if.ua*

Розглянуто ортонормований базис векторних просторів, поняття сплесків для неперервних і дискретних сигналів. Показано, що співвідношення багатомасштабного аналізу дозволяють виразити масштабуючі функції і сплески через набори коефіцієнтів. Розглянуто використання цифрових фільтрів і Z-перетворень для підсмугового перетворення сигналів. Показана особливість біортогональних перетворень. Проведено огляд практичного використання сплеск-перетворень.

Ключові слова: сплески, сплеск-перетворення, неперервні і дискретні сигнали, цифрові фільтри, Z-перетворення.

Стаття постуила до редакції 19.02.2005; прийнята до друку 21.05.2005.

I. Вступ

Сплеск перетворення використовуються при аналізі і обробці нестационарних (в часі) або неоднорідних (в просторі) сигналів. Під сплеск-перетворенням (*wavelet transform*), розуміють розклад сигналу по системі сплесків. Сплески, це функції, кожна з яких є зсунутою і масштабованою копією породжуючого сплеску (*mother-wavelet*) [1-6]. При цьому, як сам сплеск, так і його копії можуть не конкретизуватися.

Сплески систематизовані по ряду признаков: по типу оброблюваного сигналу (неперервному або дискретному); по наявності або відсутності надлишкової інформації; по типу базисів у функціональних просторах для перетворень без надлишкової інформації (ортогональний, напівортогональний, біортогональний); по властивості збереження норми; по розмірності перетворень і по числу каналів [7]. Вибір конкретного сплеску, із неперервного або дискретного, залежить від властивостей аналізованого сигналу і простоти його розкладу. Дискретні сплески не можуть бути записані в аналітичній формі (крім найпростіших), а характеризуються набором коефіцієнтів у функціональних рівняннях.

Доказано, що любую функцію можна подати у вигляді суперпозиції сплесків і існує стійкий числовий алгоритм обчислення коефіцієнтів такого розкладу. Ці коефіцієнти повністю характеризують функцію і її можна відновити по цих коефіцієнтах.

Сплеск-базис задається ітераційним алгоритмом із зміною масштабу і зсуву породжуючої функції, що

дозволяє виконувати багатомасштабний аналіз. Кожна шкала містить свою незалежну інформацію про сигнал у вигляді сплеск-коефіцієнтів. Аналіз сплеск-коефіцієнтів на різних масштабах дає змогу діагностувати процес, що породжує сигнал.

Необхідно відмітити, що сплеск-аналіз дозволяє виявити тільки локальні або скриті характеристики сигналу і не пояснює його динаміку і фізичну природу.

Стаття присвячена описанню і аналізу загальних властивостей сплесків, сплеск-перетворень і їх прикладному застосуванню.

II. Векторні простори.

При аналізі любого сигналу вибирається відповідний базис, тобто система функцій, яка буде грати роль "функціональних координат". В більшості випадків сигнали можна подати квадратно-інтегрованими функціями, визначеними на дійсній осі (або квадратно-сумованими послідовностями комплексних чисел. Вони утворюють нескінченно-вимірний гільбертовий простір $L^2(\mathbb{R})$ ($L^2(\mathbb{Z})$). Для цих функцій визначена норма і скалярний добуток

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}, \quad \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\bar{g}(t)dt,$$

де риска зверху означає операцію комплексного спряження для $g(t)$.

Дві функції ортогональні, якщо

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\bar{g}(t)dt = 0.$$

Гільбертовий простір завжди має ортонормовані

базиси e_m , такі, що $\langle e_m, e_n \rangle = \delta_{m,n}$, де

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \text{ функція Кронекера,}$$

$$\|f\|^2 = \int |f(t)|^2 dt = \sum_m |\langle f, e_m \rangle|^2.$$

Аналогічно, множини функцій є ортонормованими у просторі $L^2[a,b]$, якщо вони попарно ортогональні і мають одиничну довжину

$$\int_a^b f_k(t) \bar{f}_l(t) dt = \delta_{k,l}, \text{ де } \delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

У гільбертовому просторі можуть бути і більш загальні сім'ї лінійно незалежних базисів (Ріса)

$$A \|f\|^2 \leq \sum |\langle f, e_m \rangle|^2 \leq B \|f\|^2,$$

де $A > 0, B < \infty$.

Ці базиси є безумовними, тобто порядок розміщення векторів може бути довільним. На основі розглянутих понять про векторний простір загальним підходом до аналізу сигналу $s(t)$ є подання його у вигляді

$$s(t) = \sum_k c_k \psi_k(t),$$

де c_k – коефіцієнти з інформацією про сигнал; $\psi_k(t)$ – задані базові функції.

Належність базових функцій до базису Ріса спрощує докази повного відновлення сигналу.

III. Сплеск-перетворення неперервного сигналу з неперервними сплесками

Є два види сплеск-перетворень неперервних сигналів, що утворюють основу теорії сплеск-аналізу: сплеск-перетворення неперервних сигналів з неперервними і дискретними сплесками. Інші перетворення є різними варіантами модифікацій, узагальнень або окремих випадків.

Сплеск-перетворенням неперервного сигналу (*continuous wavelet transform*) з неперервним сплеском називають функцію двох змінних

$$c(a, b) = \langle s, \psi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{a,b}(t) dt, \quad (1)$$

де a – масштаб, b – зсув; $\psi_{a,b}(t)$ – масштабовані і зсунуті копії породжуючого сплеску.

Якщо енергія сигналу скінчена в просторі з областю обмеження R

$$s(t) = \int_R s^2(t) dt,$$

тоді з врахуванням обмежень на область сигналу і значення a, b

$$c(a, b) = \int_R s(t) \psi_{a,b}(t) dt, \quad (2)$$

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a \in R^+ - \{0\}, b \in R, \quad (3)$$

де $\psi_{a,b}(t)$ – масштабовані і зсунуті копії

породжуючого сплеску $\psi(t) \in L^2(R)$ для заданих значень a, b ; $1/\sqrt{a}$ – коефіцієнт для збереження норми при масштабуванні сплеску.

Як видно з (1), сплеск-коефіцієнти визначаються інтегральними значеннями скалярного добутку сигналу на сплеск-функцію і відображають кореляцію аналізованої частини сигналу і сплеску. Великі значення коефіцієнтів означають наявність в сигналі значних флуктуацій в даний момент часу і добру відповідність огинаючої сигналу і сплеску.

Прикладом сплеску в аналітичній формі є друга похідна від функції щільності нормального розподілу, взятої із знаком мінус

$$f(t) = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma = 1, \mu = 0,$$

$$\psi(t) = f''(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1-t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Після нормування $\int_R \psi(t) dt = 1$ сплеск матиме вигляд

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1-t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

За форму огинаючої (рис. 1) він отримав назву "мексиканський капелюх". Зсунуті і масштабовані копії сплесків показано на рис. 2.

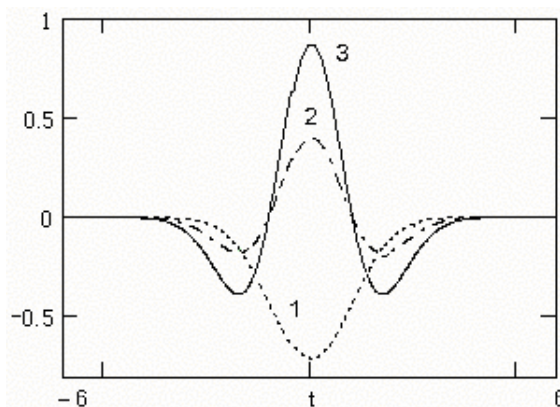


Рис. 1. Сплеск "мексиканський капелюх":
1 – функція щільності нормального розподілу, взята із знаком мінус;
2 – ненормований сплеск;
3 – нормований сплеск.

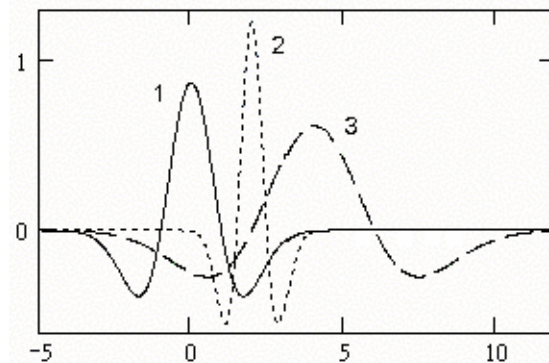


Рис. 2. Зсунуті і масштабовані копії сплесків:
1 – породжуючий сплеск; 2 – копія сплеску ($a = 0,5, b = 2$); 3 – копія сплеску ($a = 2, b = 4$).

Найбільш важливі властивості сплесків задаються умовами допустимості і регулярності. Якщо для породжуючого сплеску виконується умова допустимості [11]

$$C_{\psi} = \int_{\mathbb{R}^-} \frac{|\Phi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega + \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\Phi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty, \quad (4)$$

де $\Phi(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \psi_{a,b}(t) e^{-i\omega t} dt$ – Фур’є образ сплеску $\psi_{a,b}(t)$, то $\Phi(\omega)$ може використовуватися для відновлення сигналу без втрат інформації

$$s(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} c(a,b) \psi_{a,b}(t) db \frac{da}{a^2}. \quad (5)$$

Умова допустимості встановлює нульове значення Фур’є образу при нульовій частоті

$$|\Phi(\omega)|^2 \Big|_{\omega=0} = 0, \quad (6)$$

тобто сплеск повинен мати полосо-пропускаючий спектр. Нульове значення Фур’є образу при $\omega \rightarrow 0$ також означає, що середнє значення сплеску у часовому просторі повинно бути нульовим (умова знаковмінності)

$$M_0 = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0, \quad f(t) \in L^2(\mathbb{R}), \quad (7)$$

де M_0 – нульовий момент (*vanishing moment*) сплеску.

Умова знаковмінності визначає форму огинаючої сплеску, як локалізованої в просторі осцилюючої хвилі.

Як видно з (2) сплеск-перетворення одновимірного сигналу є двовимірним. Сплеск-перетворення двовимірного сигналу є чотиривимірним. Розмірність результатів сплеск перетворень в степені два більша розмірності вхідного сигналу, що є небажаним для практичних застосувань. Для зменшення кількості коефіцієнтів сплеск-перетворень накладають додаткову умову для швидкого зменшення значень коефіцієнтів порівняно із зменшенням масштабу. Це умова регулярності і вона встановлює деяку гладкість і компактність сплеску в просторовій і частотній областях.

Розклад (2) в ряд Тейлора в околі точки $t = 0$ при $b = 0$ дає

$$\psi(a, 0) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[\sum_{p=0}^n S^{(p)}(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{t^p}{p!} \psi\left(\frac{t}{a}\right) dt + O(n+1) \right]. \quad (8)$$

Якщо позначити p -ий момент сплеску як $M_p = \int_{\mathbb{R}} t^p \psi(t) dt$, то (8) прийме вигляд

$$\psi(a, 0) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[S(0) M_0 a + \frac{S^{(1)}(0)}{1!} M_1 a^2 + \dots + \frac{S^{(n)}(0)}{n!} M_n a^{n+1} + O(a^{n+2}) \right]. \quad (9)$$

Із умови знаковмінності (7) $M_0 = 0$ і якщо прирівняти до нуля решту коефіцієнтів M_1, M_2, \dots, M_n , то для гладкого сигналу сплеск-коефіцієнти будуть зменшуватися із швидкістю a^{n+2} . Якщо сплеск має N зникаючих моментів, то це задає порядок апроксимації для сплеск-перетворень. Існують

функції для яких всі моменти зникають, наприклад $s(t) = e^{-t/4} \sin(t^4)$, для $t \geq 0$.

Таким чином, умова допустимості визначає хвильову природу сплеска, а умова регулярності швидкість зменшення сплеск-коефіцієнтів. Розглянуте перетворення є квазі-ортогональне, тобто подібне до ортогонального в тому розумінні, що дозволяє відновити сигнал шляхом інтеграції всіх проекцій сигналу на сплеск-базис.

IV. Сплеск-перетворення неперервного сигналу з дискретними сплесками

Сплеск-перетворення неперервного сигналу з неперервними сплесками має деякі властивості, що затрудняють його пряме використання у вигляді (2). Це надлишковість сплеск-коефіцієнтів, їх нескінчене число і відсутність для більшості сплесків аналітичного подання. Для усунення цих недоліків використовується перетворення з ортогональними дискретними сплесками із значно скороченим числом копій. При цьому на сплеск накладаються умови породження ортонормованого базису в $L^2(\mathbb{R})$ і дискретизуються значення a і b

$$a = 2^j \text{ (або } 2^{-j}), \quad b = ka, \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

де $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$.

Подібна дискретизація найбільш поширена, а отримана сітка називається діадною (рис. 4). У ній зсув прив’язаний до масштабу, масштаб змінюється із кратністю 2, а Фур’є образ зосереджений в основному між π і 2π . Масштабний множник може бути раціональним числом [2], в тому числі і

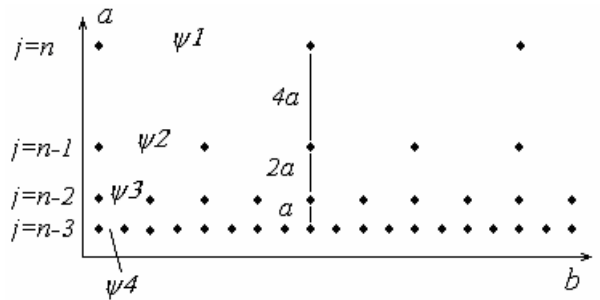


Рис. 4. Локалізація дискретних сплесків у просторово-масштабному просторі на діадній сітці.

дробовим, що дає більш вузьку полосу пропускання.

При дискретних діадних значеннях a і b (3) прийме вигляд

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - k2^j}{2^j}\right) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k), \quad (10)$$

при $a = 2^j$,

і $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$, при $a = 2^{-j}$.

Зміна знаку параметра масштабу j впливає на напрямок росту роздільної здатності $(1/a)$. При

збільшенні j на 1 при $a = 2^j$ зсуви збільшуються і сплески розширюються в двоє, а роздільна здатність зменшується.

В подальших викладеннях використовується масштаб $a = 2^{-j}$, який при збільшенні j дає ріст роздільної здатності.

Дискретні значення a, b у формулі (2) даватимуть скінчену множину коефіцієнтів

$$c(j, k) = \langle s, \psi_{j,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} s(t) \psi_{j,k}(t) dt, \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (11)$$

Дискретні сплески можна зробити ортогональними по відношенню до своїх зсувів і масштабів спеціальним вибором породжуючого сплеску

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(t) \bar{\psi}_{m,n}(t) dt = \begin{cases} 1, & j=m, \quad k=n \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді довільний сигнал може бути відновлений з використанням ортогонального сплеск-базису

$$s(t) = \frac{1}{C_\psi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(j, k) \psi_{j,k}(t). \quad (12)$$

Нормування коефіцієнтів базових функцій у частотній області дозволяє вибрати $C_\psi = 1$ і записати (12) у вигляді

$$s(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(j, k) \psi_{j,k}(t). \quad (13)$$

Проте ортогональність не є суттєвою при відновленні сигналів. Неортогональність потрібна в деяких прикладних застосуваннях, де надлишковість допомагає зменшити чутливість до шуму або покращити інваріантність зсувів. Неінваріантність зсувів є основним недоліком дискретних сплесків: результуючі сплеск-перетворення не інваріантні до зсуву, тобто сплеск-перетворення сигналу і його просторово зсунуті копії не є зсунутими версіями один одного.

Таким чином, сплеск-перетворення неперервного

сигналу із дискретними сплесками – це розклад сигналу на сітці взаємозв'язаних масштабів і переміщень. Необхідною і достатньою умовою відновлення сигналу $s(t)$ є обмеження енергії дискретних сплеск-коефіцієнтів двома позитивними межами.

4.1. Смогопропускаючий фільтр. Рівняння (6) визначає смогопропускаючий спектр сплеску. З теорії Фур'є перетворень відомо, що стиск в просторі еквівалентний розтягуванню спектру і зсуву його в область високих частот (рис. 5)

$$F\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Зміна масштабу сплесків на діадній сітці $a = 2^j$ дозволяє перекрити скінченний спектр сигналу спектром сплесків, що розширюються і частково перекриваються (рис. 6). Стиск сплеску в два рази розтягує і зсуває в два рази його частотний образ.

Між дисперсією сплеску і його Фур'є образу існує наступна залежність

$$D(\psi) \cdot D(\hat{\psi}) > C, \quad (14)$$

де C – константа, яка не залежить від сплеску, а тільки від розмірності простору. З (14) видно, що неможливо одночасно зменшувати просторову і частотну локалізацію сплеску.

Таким чином, сплеск можна розглядувати як смогопропускаючий фільтр, а послідовність стиснутих сплесків як банк смогопропускаючих фільтрів. Відношення центральної частоти спектру до ширини спектру сплеску $Q = \omega / L_\omega$ буде однакове для всіх сплесків і задає коефіцієнт точності (Q -константу) фільтра.

4.2. Функція масштабування. Як видно з рис. 6, при розтягуванні сплеску центральна частота і ширина сплеску зменшуються в два рази. Для досягнення частоти $\omega = 0$ необхідне наближення нескінченним числом сплесків. Для заміни сплесків наблизень при $\omega \rightarrow 0$ вводиться функція

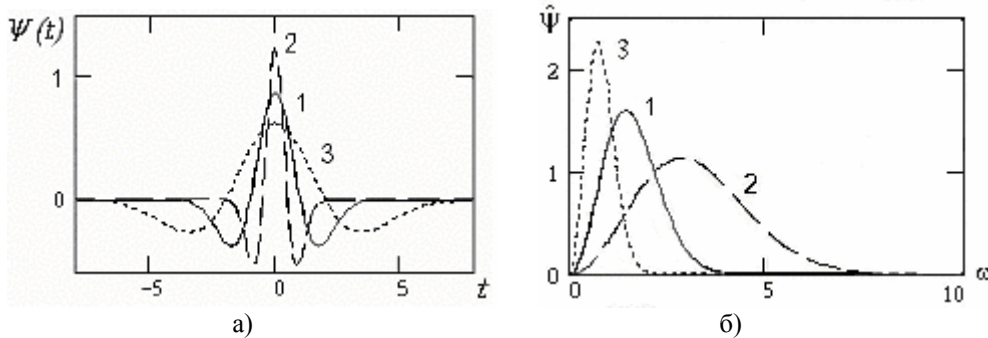


Рис. 5. Сплески (а) і їх Фур'є образи (б):

1 – породжуючий сплеск ($a = 1, b = 0$); 2 – копія стиснутого сплеску ($a = 2$); 3 – копія розтягнутого сплеску ($a = 0,5$).

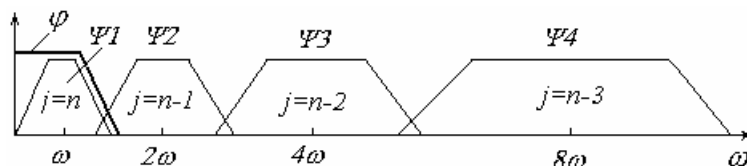


Рис. 6. Частотні образи сплесків (Ψ_1 – Ψ_4) і масштабуючої функції (ϕ).

масштабування $\varphi(t)$, частотний образ якої перекриває низькочастотний спектр. Тоді (13) можна записати у наступному вигляді

$$s(t) = f_0(t) + \sum_{j=J_0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c(j,k) \psi_{j,k}(t), \quad (15)$$

$$f_0(t) = \sum_{j=-\infty}^{J_0-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c(j,k) \psi_{j,k}(t),$$

де $f_0(t)$ - початкове наближення для заданого масштабу округлення J_0 .

Функція $\varphi(t)$ така, що множина її зсувів утворює ортонормовану систему і $f_0(t)$ можна точно подати у вигляді розкладу по цій системі

$$f_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a(J_0, k) \varphi_k(t),$$

де $\varphi_k(t) = \varphi(t-k)$, $a(J_0, k) = \langle f, \varphi_k \rangle$, $k \in Z$.

Тоді для (15) можна записати еквівалентне подання з використанням функції масштабування

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a(J_0, k) \varphi_k(t) + \sum_{j=J_0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c(j,k) \psi_{j,k}(t). \quad (16)$$

Для практичного використання (16) можна записати із скінченим числом доданків сум

$$s(t) = \sum_{k \in Z} a(J_0, k) \varphi_k(t) + \sum_{j=J_0}^J \sum_{k \in Z} c(j,k) \psi_{j,k}(t). \quad (17)$$

Найпростішим прикладом системи з масштабуючою і сплеск функціями є система Хаара (рис. 7)

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & x \notin [0, 1) \end{cases} \quad \psi(t) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 0.5) \\ -1, & x \in [0.5, 1) \\ 0, & x \notin [0, 1) \end{cases}$$

Таким чином, сигнал можна розкласти по базису масштабуючих і сплеск функцій. Масштабуючу функцію можна розглядувати як низькочастотний

смугопр пропускаючий фільтр.

4.3. Ортогональний багатомасштабний аналіз.

Ортогональним багатомасштабним аналізом в $L^2(\mathbb{R})$, називається послідовність замкнутих підпросторів $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$, $j \in Z$ з наступними властивостями

1. $V_j \subset V_{j+1}$, $j \in Z$;
2. $\text{span}(\cup_{j \in Z} V_j) = L^2(\mathbb{R})$;
3. $s(t) \in V_j \Leftrightarrow s(2t) \in V_{j+1}$, $s(2^{-j}t) \in V_0$;
5. $s(t) \in V_0 \Leftrightarrow s(t-k) \in V_0$, $k \in Z$;
6. існує такий елемент $\varphi(t) \in V_0$, що послідовність $\{\varphi(t-k)\}_{k \in Z}$ формує ортонормований базис в V_0 .

Із підпунктів 1, 4-6 виходить, що знайдуться такі числа $h_g \in \mathbb{R}$, $g \in K$, $K \subset Z$, для яких

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{g \in Z} h_g \varphi(2t-g). \quad (18)$$

Вираз (18) – це масштабне співвідношення для масштабуючих функцій. Для любого $j \in Z$ послідовність масштабуючих функцій $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in Z}$, де $\varphi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j t - k)$, є ортонормованим базисом у просторі V_j .

Якщо породжуюча масштабуюча функція належить множині $L^1(\mathbb{R})$ і нормалізована $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1$, то з точністю до значень на множині міри нуль, вона однозначно визначається набором значень $\{h_g\}_{g \in K}$.

Для кожної пари підпросторів $V_j \subset V_{j+1}$, $j \in Z$ існує такий уточнюючий підпростір W_j , що

$$V_j \perp W_j, \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j = L^2(\mathbb{R}) \quad (\text{рис. 8}).$$

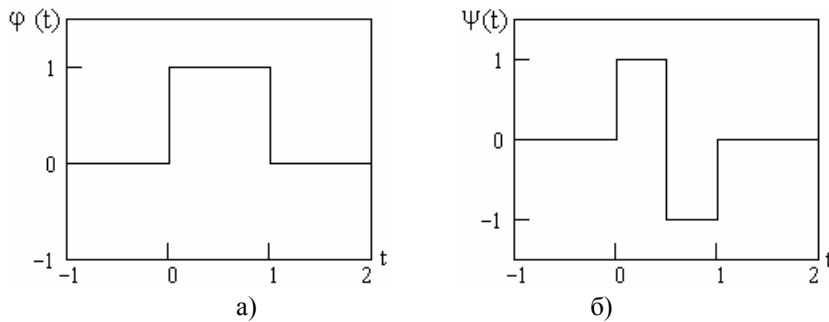


Рис. 7. Система Хаара: а) φ – масштабуюча функція; б) ψ – сплеск функція.

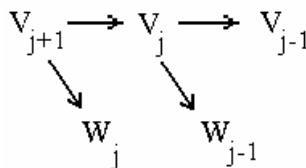


Рис. 8. Розклад простору V_{j+1} на підпростір V_j і ортогональне доповнення W_j .

Якщо існує $\psi(t) \in W_0$ і послідовність $\{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ є ортонормованим базисом в W_0 , то $\psi(t)$ є породжуючим сплеском. Набір функцій $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, де $\psi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k)$ є сплесками, що утворюють ортонормований базис в $L^2(\mathbb{R})$. Породжуючий сплеск $\psi(t)$ є також елементом простору V_1 , тому знайдуться такі числа $g_l \in \mathbb{R}, l \in K, K \subset \mathbb{Z}$, що

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{l \in K} g_l \varphi(2t-1), \quad (19)$$

а отже $\psi(t)$, з точністю до значень на множині міри нуль, визначається коефіцієнтами $\{g_l\}_{l \in K}$. Вираз (19) – це масштабне співвідношення для сплесків.

Для любого $J_0 \in \mathbb{Z} \oplus_{j=-\infty}^{J_0-1} W_j = V_{J_0}$, тому

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j = V_{J_0} \oplus \bigoplus_{j=J_0}^{+\infty} W_j, \text{ а отже (17) можна}$$

розглядувати як розклад $s(t)$ на дві проекції – простір V_{J_0} (перший доданок) і ортогональне доповнення V_{J_0} до $L^2(\mathbb{R})$ (другий доданок). Мінючи J_0 можна регулювати кількість інформації в доданках. Структура просторів така, що проекція сигналу на V є низькочастотним (огрубленим, апроксимуючим), а на W – високочастотним (деталізуючим) поданням цього сигналу.

Таким чином, ортогональний багатомасштабний аналіз встановлює співвідношення між масштабуючими функціями і сплесками, і показує, що вони повністю визначаються наборами апроксимуючих $\{h_g\}_{g \in K}$ і деталізуючих $\{g_l\}_{l \in K}$ коефіцієнтів, що відрізняються довизначеністю індексів нульових елементів.

4.4. Визначення коефіцієнтів. Багатомасштабний аналіз дозволяє визначити коефіцієнти h_k і g_k із визначень і властивостей дискретних сплесків.

Ортогональність масштабуючих функцій $\int \varphi(t)\varphi(t-m)dt = \delta_{om}$ дає співвідношення

$$\sum_k h_k h_{k+2m} = \delta_{om}.$$

Ортогональність сплесків до масштабуючих функцій $\int \psi(t)\varphi(t-m)dt = 0$ дає

$$\sum_k h_k g_{k+2m} = 0,$$

розв'язком якого є $g_k = (-1)^k h_{2M-k-1}$, де M визначає число коефіцієнтів h_k і довжину області задання сплеску $(2M-1)$. Отже коефіцієнти g_k однозначно визначаються коефіцієнтами h_k .

Умова ортогональності сплесків поліномам до степені $M-1$ $\int t^n \psi(t)dt = 0, n = 0, \dots, M-1$, дає

$$\sum_k k g_k = \sum_k (-1)^k k^n h_k = 0. \quad (20)$$

Умова нормування $\int \varphi(t)dt = 1$ з врахуванням (18) дає

$$\sum_k h_k = \sqrt{2}. \quad (21)$$

Запис (19), (20), (21) для $M = 2$ у явному вигляді дає систему рівнянь

$$\begin{aligned} h_0 h_2 + h_1 h_3 &= 0, \\ h_0 - h_1 + h_2 - h_3 &= 0, \\ -h_1 + 2h_2 - 3h_3 &= 0, \\ h_0 + h_1 + h_2 + h_3 &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Розв'язком системи, у випадку знака мінус, будуть коефіцієнти

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \\ h_2 &= \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Ці коефіцієнти задають сплеск Добеші D_4 (рис. 9)

Таким чином, функція масштабування і сплески виражаються через набори коефіцієнтів. Це дає змогу на практиці використовувати тільки коефіцієнти h_k , без обчислення конкретної форми сплеску. Сплески Добеші з M нульовими моментами мають μM

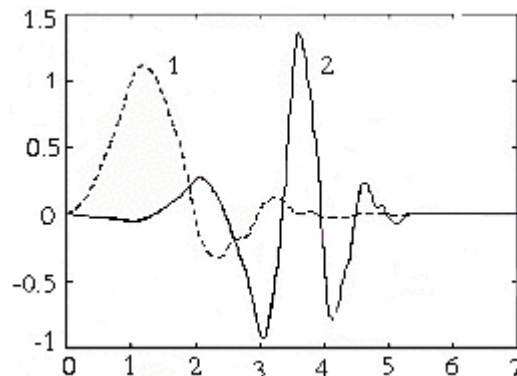


Рис. 9. Масштабуюча функція (1) і сплеск (2) Добеші при $M = 4$.

($\mu \approx 0,275$ для $6 < M < 12$) неперервних похідних [2] і гладкість, яка зростає із ростом M .

V. Неперервне перетворення дискретного сигналу

Дискретний сигнал довжини N , $s = \{s_j\}_{j=0}^{N-1}$, можна подати у вигляді неперервного сигналу – кусочно-постійної функції

$$s(t) = s_j, \quad t \in [j, j+1), \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Підставивши вираз для $s(t)$ в (1) і використовуючи цілочисельні зсуви і масштаби, отримаємо

$$c(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{j=0}^{N-1} S_j \int_j^{j+1} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt,$$

$$a = 0, 1, \dots, N-1, \quad b = 0, 1, \dots, N-1$$

що по суті є числовою реалізацією неперервного перетворення.

VI. Дискретне (діадне) перетворення дискретного сигналу

Таке перетворення можна розглядати як окремий випадок діадного перетворення для неперервних сигналів. У такому випадку, використовуючи (18), можна виразити функцію масштабування роздільної здатності j через лінійну комбінацію масштабуючих функцій рівня $j+1$

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k}(t) &= \sqrt{2} \sum_{g \in Z} h_g \varphi_{j,k}(2t-g) = \\ &= \sum_{g \in Z} h_g \varphi_{j+1,2k+g}(t), \quad j, k \in Z. \end{aligned} \quad (22)$$

Із аналогічного співвідношення для сплесків отримуємо

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}(t) &= \sqrt{2} \sum_{l \in Z} h_l \varphi_{j,k}(2t-l) = \\ &= \sum_{l \in Z} h_l \varphi_{j+1,2k+l}(t), \quad j, k \in Z \end{aligned} \quad (23)$$

Для початкового і кінцевого кроків в (22), (23) необхідно задати найбільшу і найменшу роздільні здатності j_{\max} , j_{\min} . Так як коефіцієнти при масштабуючих функціях на рівні j_{\max} не визначені, то в їх якості можна взяти значення дискретного сигналу. У цьому випадку довільний вибір j_{\max} не впливає на точність подання. Тоді (22), (23) приймуть наступний вигляд

$$\begin{aligned} v(j, k) &= \sum_{g \in Z} v(j+1, 2k+g) h_g, \quad w(j, k) = \\ &= \sum_{l \in Z} w(j+1, 2k+l) g_l, \end{aligned}$$

$$j = j_{\max} - 1, j_{\max} - 2, \dots, j_{\min}; \quad v_{j_{\max}, k} = S_k, \quad k \in Z. \quad (24)$$

Вираз (24) задає пряме дискретне (діадне) сплеск-перетворення дискретного сигналу. Маючи подання сигналу з роздільною здатністю j_{\min} і набори коефіцієнтів (24), можна відновити сигнал до рівня j_{\max}

$$v(j+1, k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (v(j, l) h_{k-2l} + w(j, l) g_{k-2l}), \quad (25)$$

$$j = j_{\max}, j_{\min} + 1, \dots, j_{\max} - 1, \quad k \in Z$$

Вираз (25) задає обернене дискретне (діадне) сплеск-перетворення дискретного сигналу.

Обчислення перетворень по формулах (24), (25) називається швидким сплеск перетворенням (*fast wavelet transform*).

VII. Цифрові фільтри і Z-перетворення

Цифровий фільтр у загальній формі можна записати наступним співвідношенням

$$y_n = \sum_{i=0}^N a_i x_{n-i} + \sum_{i=1}^N b_i y_{n-i},$$

де $\{x_n\}$ - вхідний сигнал, $\{y_n\}$ - вихідний сигнал, $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ - коефіцієнти фільтра.

Фільтр має скінчений імпульсний відгук, якщо послідовність $\{b_i\}$ містить тільки нулі і нескінчений імпульсний відгук, якщо деякі елементи $\{b_i\}$ не нульові. Фільтри із скінченим імпульсним відгуком є завжди стійкими. Якщо вхідний сигнал $\{x_n\}$ має тільки один елемент із значенням 1, за яким ідуть всі 0, то вихідний сигнал буде імпульсним відгуком $\{h_n\}_n^M$.

Знаючи імпульсний відгук фільтра можна виразити вихідний сигнал через вхідний з допомогою згортки

$$y_n = \sum_{k=0}^M h_k x_{n-k}, \quad (26)$$

що позначається як $h * x$.

Операцію згортки можна застосувати до (24), (25). Для цього додатково вводяться оператори проріджування $\uparrow n[s]$ і вставки $\downarrow n[s]$, $n \in Z$. Перший оператор із вхідного сигналу залишає тільки елементи із індексами $i \cdot n$, $i \in Z$, а другий вставляє після кожного елементу $n-1$ елементів. Та як в (26) h і x індексуються в протилежних напрямках, то потрібна операція s^* перенумерації елементів сигналу у зворотному порядку. З використанням розглянутих операцій і операторів формули (24), (25) приймуть наступний вигляд

$$v(j) = \downarrow 2[v(j+1) * h^*], \quad (27)$$

$$w(j) = \downarrow 2[v(j+1) * g^*], \quad j \in Z,$$

$$v(j+1) = \uparrow 2[v(j)] * h + \uparrow 2[w(j)] * g, \quad j \in Z. \quad (28)$$

У такому трактуванні коефіцієнти h і x будуть еквівалентами фільтрів. Фільтр h виокремлює низькочастотну (огрублену) частину сигналу, а фільтр g - високочастотну (деталізуючу).

Формули (27), (28) часто записуються з допомогою Z-перетворень. Z-перетворення дискретного сигналу $s = \{s_n\}$, $n \in Z$ є узагальненням дискретного Фур'є перетворення

$$s(z) = \sum_{n \in Z} s_n z^{-n}, \quad z = e^{\sigma n + j\omega n}.$$

Z задає синусоїду із зростаючою ($\sigma < 0$), постійною ($\sigma = 0$) або спадаючою ($\sigma > 0$) амплітудою. Якщо сигнал має скінчене число відмінних від нуля елементів, то Z-перетворення буде поліномом із скінченим числом елементів. Поліном можна записати у вигляді

$$s(z) = \frac{N(z)}{D(z)}.$$

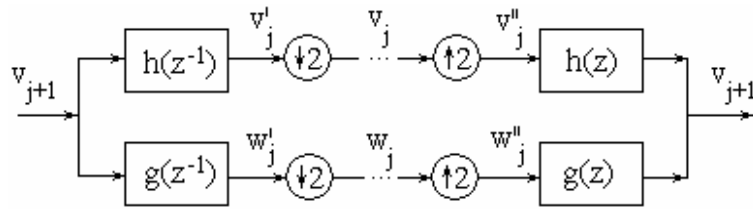


Рис. 10. Підсмугове перетворення сигналу

Значення z при яких $s(z) = 0$ називаються нулями, а при яких $s(z) = \infty$ – полюсами.

Z -перетворення мають важливу властивість: згортка двох дискретних сигналів еквівалентна перемноженню їх Z -перетворень $s * t = s(z) \cdot t(z)$.

Якщо $s(z)$ – Z -перетворення сигналу s , то $s(z^{-1})$ – Z -перетворення сигналу y якого елементи перенумеровані у зворотному порядку.

Використовуючи Z -перетворення, формули (27), (28) можна записати наступним чином

$$v_j(z) = \downarrow 2[h(z^{-1})v_{j+1}(z)], \quad (29)$$

$$w_j(z) = \downarrow 2[g(z^{-1})v_{j+1}(z)], \quad j \in Z,$$

$$v_{j+1}(z) = h(z) * \uparrow 2[v_j(z)] + g(z) * \uparrow 2[w_j(z)], \quad (30)$$

$j \in Z$.

У формулах (29), (30) в явному вигляді відсутні масштабуючі функції і сплески, а використовуються фільтри h і g , що задаються коефіцієнтами.

Для отримання оберненого перетворення (30) на фільтри накладаються наступні умови

$$h(z) \cdot h(z^{-1}) + g(z) \cdot g(z^{-1}) = 2, \quad (31)$$

$$h(z) \cdot h(-z^{-1}) + g(z) \cdot g(-z^{-1}) = 0.$$

Фільтри, що задовільняють умови (31), називаються квадратурно-дзеркальними. Схема обчислень із використанням (29), (30) показана на рис. 10 і називається підсмуговим перетворенням.

Послідовне застосування підсмугового перетворення сигналу використовується в пірамідальному алгоритмі Малла [13].

Таким чином, використання понять цифрових фільтрів і Z -перетворень дає змогу застосувати підсмугове перетворення сигналу по частотах з використанням фільтрів.

VIII. Фрейми

Перетворення неперервного сигналу з неперервними сплесками (1)-(3) містять надлишкову інформацію, але інваріантні до зсуву

$$c_{s(t+\alpha)}(a, b) = c_{s(t)}(a, b + \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (32)$$

Це дозволяє проводити детальний аналіз сигналу. Для проведення швидкого аналізу-синтезу сигналу використовують перетворення неперервного сигналу з ортогональними дискретними (діадними) сплесками (10), (12). Це перетворення втрачає властивість інваріантності до зсуву, але не має надлишкової інформації, так як є розкладом по базису функціонального простору.

Фрейми (*frames*) – це перетворення, що займає

проміжне положення між цими перетвореннями. Воно задовільняє умову (32) і використовує відносно невеликий об'єм даних. Такі перетворення для неперервних сигналів обчислюються по (1)-(3), де $a = 2^{-j}$, $j \in Z$; $b \in \mathbb{R}$, а для дискретних сигналів розклад виконується для цілочисельних зсувів $b \in Z$.

В [2] доказано, що необхідною і достатньою умовою відновлення сигналу $s(t)$ є обмеження енергії дискретних сплеск-коефіцієнтів двома позитивними межами

$$A \|s\|^2 \leq \sum_{j,k} | \langle s, \psi_{j,k} \rangle |^2 \leq B \|s\|^2, \quad j, k \in Z,$$

де $\|s\|^2$ – енергія сигналу; $A > 0$, $B < \infty$ і незалежні від $s(t)$; $\psi_{j,k}$, $j, k \in Z$ – сім'я базових сплесків, що утворюють фрейми. Базис Ріса є фреймом, але обернене твердження невірне. При $A = B$ фрейми жорсткі, при $A = B = 1$ – відповідають ортонормованим сплескам. У випадку $A \neq B$ втрачається властивість ортонормованості, але можна сконструювати неортогональні сплески, які називаються двоїстими фреймами. У них сплеск аналізу відрізняється від сплеску відновлення.

IX. Неортогональні сплески

Ортогональність базису сплесків є досить сильним обмеженням, а різні прикладення ставлять ряд вимог до базису: компактність носія, гладкість, симетрія, кількість нульових моментів. Для гладких симетричних сплесків з компактним носієм неможливо побудувати ортонормований базис, але неортонормований базис існує.

Для проведення неортогонального багатомасштабного аналізу замінюється вимога ортонормальності $\{\varphi(t-k)\}_{k \in Z}$ в V_0 на належність до базису Ріса. В результаті послідовності масштабуючих функцій $\{\varphi_{j,k}(t)\}_{k \in Z}$ в V_j , $j \in Z$ і сплесків $\{\psi_{j,k}(t)\}_{k \in Z}$ в W_j , $j \in Z$ також будуть базисами Ріса. Тоді будь-який підпростір V_{j+1} , $j \in Z$ подається у вигляді прямої суми V_j і W_j , які не будуть ортогональними. З цього виходить, що послідовність деталізуючих підпросторів W_j може визначатися неоднозначно. Для усунення цього шукають двоїстий базис. Якщо базис $e = \{e_j\}_{j \in Z}$ ортонормований, то розкладом сигналу s буде

$$s(t) = \sum_j \langle f, e_j \rangle e_j.$$

Для неортогонального базису шукається двоїстий до нього базис $\tilde{e} = \{\tilde{e}_j\}_{j \in Z}$, такий що, $\langle e_j, \tilde{e}_k \rangle = \delta_{j,k}$.

Базиси e і \tilde{e} утворюють біортогональну пару. Тоді сигнал s можна подати у вигляді

$$s(t) = \sum_j \langle f, \tilde{e}_j \rangle e_j.$$

Якщо для двох неортогональних багатомасштабних підпросторів V_j і \tilde{V}_j існують деталізуючі підпростори W_j і \tilde{W}_j , такі, що $\tilde{V}_0 \perp W_0$, $V_0 \perp \tilde{W}_0$ і базисні функції $\varphi_{0,k}(t)$ і $\psi_{0,k}(t)$ просторів V_0, W_0 складають біортогональні пари з $\tilde{\varphi}_{0,k}(t)$ і $\tilde{\psi}_{0,k}(t)$ просторів \tilde{V}_0, \tilde{W}_0 , то ці вимоги будуть виконані і для інших рівнів $j \in Z$. При таких умовах масштабуючі функції $\{\varphi_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ і $\{\tilde{\varphi}_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ утворюють між собою, а сплески $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ і $\{\tilde{\psi}_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ утворюють між собою в просторі $L^2(\mathbb{R})$ біортогональні пари. Тоді, на основі (11)-(13) можна записати пряме і зворотне біортогональне сплеск-перетворення

$$w(j, k) = \langle s, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle, \quad j, k \in Z, \quad (33)$$

$$s(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(j, k) \psi_{j,k}(t). \quad (34)$$

Так як ортогональне перетворення є окремим видом біортогонального, то його можна розкласти по комбінованому базису

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{v}(J_0, k) \varphi_{J_0, k}(t) + \sum_{j=J_0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(j, k) \psi_{j,k}(t), \quad J_0 \in Z, \quad (35)$$

де $\tilde{v}(J_0, k) = \langle s, \varphi_{J_0, k} \rangle$, $J_0, k \in Z$. Аналогічно можна записати формули для біортогональних перетворень дискретних сигналів. Один крок прямого і оберненого перетворень матиме вигляд

$$\tilde{v}(j, k) = \sum_{g \in Z} \tilde{v}(j+1, 2k+g) \tilde{h}_g, \quad (36)$$

$$\tilde{w}(j, k) = \sum_{l \in Z} \tilde{w}(j+1, 2k+l) \tilde{g}_l, \quad j, k \in Z,$$

$$\tilde{v}(j+1, k) = \sum_{g=-\infty}^{+\infty} (\tilde{v}(j, g) \tilde{h}_{k-2g} + \tilde{w}(j, g) \tilde{g}_{k-2g}), \quad j, k \in Z.$$

В класі біортогональних перетворень існують напівортогональні сплески, які мають наступну особливість [1]. На будь-якому рівні роздільної здатності $j \in Z$ підпростір W_j повинен бути ортогональним доповненням V_j до V_{j+1} , але базиси цих просторів можуть бути неортогональними. Аналогічна вимога накладається на \tilde{V}_j, \tilde{W}_j . В результаті, подання сигналу на будь-якому рівні роздільної здатності $j \in Z$ буде ортогональною проекцією на V_j , що є найкращим наближенням.

X. Збереження норми

У формулі (3) присутній нормуючий коефіцієнт $1/\sqrt{a}$, який зберігає норму любого сплеска. Для нормалізації системи достатньо поставити вимогу, щоб норма $\psi(t)$ дорівнювала 1. При стисканні (розтягуванні) сплеску в a разів по осі OX , його амплітуда відповідно зростає (зменшується) в \sqrt{a} разів. Розклад сигналу по нормованому базису потрібний в задачах апроксимації для оцінки наближень. Згідно теореми Парсеваля, енергія сигналу при перетвореннях зберігається

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{C} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} |c(a, b) \psi_{a,b}(t)|^2 db \frac{da}{a^2}. \quad (37)$$

Маючи задану норму помилки можна визначити коефіцієнти при нормованих базисних функціях.

Проте є ряд задач (перетворення растрових зображень, B -сплайнова апроксимація), де нормалізація непотрібна. У таких випадках у відповідних формулах опускаються нормуючі множники. Такі нормалізовані перетворення належать до класу біортогональних і утворюють підклас ортогональних ненормалізованих перетворень.

XI. Матрична форма запису перетворень

Рівняння (35), (36) можна записати у вигляді добутку нескінченної розмірності матриці на вектор стовпчик

$$\tilde{v}^T(j) = \tilde{H} \tilde{v}^T(j+1), \quad \tilde{w}^T(j) = G \tilde{v}^T(j+1), \quad j \in Z, \quad (38)$$

$$\tilde{v}^T(j+1) = H \tilde{v}^T(j) + G \tilde{w}^T(j), \quad j \in Z. \quad (39)$$

Стовпчики матриць H, G містять компоненти фільтрів і кожний стовпчик зсунутий на дві позиції відносно попереднього. Строки матриць \tilde{H}, \tilde{G} містять компоненти фільтрів і кожна строчка зсунута на дві позиції відносно попередньої.

$$H = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dots & h_{-1} & \dots & & \\ \dots & h_0 & h_{-2} & \dots & \\ \dots & h_1 & h_{-1} & h_{-3} & \dots \\ \dots & h_2 & h_0 & h_{-2} & \dots \\ \dots & \dots & h_1 & h_{-1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & h_0 & \dots \\ \dots & \cdot & \cdot & h_1 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dots & \tilde{h}_{-1} & \tilde{h}_0 & \tilde{h}_1 & \dots & & \\ \dots & \dots & \tilde{h}_{-2} & \tilde{h}_{-1} & \tilde{h}_0 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{h}_{-3} & \tilde{h}_{-2} & \tilde{h}_{-1} & \tilde{h}_0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Для сигналів скінченної довжини пряме і зворотне перетворення записують з допомогою однієї блочної матриці

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}^T(j) \\ \tilde{w}^T(j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_j \\ \tilde{G}_j \end{bmatrix} \tilde{v}^T(j+1), \quad j \in Z, j \geq 0, \quad (40)$$

$$\tilde{v}^T(j+1) = [H_j | G_j] \begin{bmatrix} \tilde{v}^T(j) \\ \tilde{w}^T(j) \end{bmatrix}, \quad j \in Z, j \geq 0, \quad (41)$$

де обидві блочні матриці H_j, G_j і \tilde{H}_j, \tilde{G}_j мають розмір $2^{j+1} \times 2^{j+1}$. Для матриць прямого і зворотного перетворень умова повного відновлення має вигляд

$$[H_j | G_j] \begin{bmatrix} \tilde{H}_j \\ \tilde{G}_j \end{bmatrix} = E_j, \quad j \in Z, j \geq 0, \quad (42)$$

де E_j – одинична матриця.

Матрична форма використовується для запису перетворень у яких коефіцієнти фільтрів можуть мінятися залежно від масштабу і зсуву (неоднорідні нестационарні перетворення). Окремим випадком є перетворення сигналів скінченної довжини, коли перші і останні рядки (стовпчики) матриць заповнюються коефіцієнтами модифікованих фільтрів, а інші є зсунутими копіями однорідних фільтрів.

ХІІ. Ліфтингова схема

Ліфтингова схема швидких сплеск-перетворень (рис. 11) починається з отримання коефіцієнтів апроксимації і деталізації з допомогою “лінивого” сплеску [35-36].

Нехай початкові коефіцієнти $a(0,k) = s(k), k \in Z$. Для зменшення їх числа, коефіцієнтам $a(1,k)$ присвоюються значення підвиборки з парними

індексами $a(1,k) = (0, 2k), k \in Z$, а коефіцієнтам $c(1,k)$ – з непарними індексами $c(1,k) = a(0, 2k+1), k \in Z$.

Такий вибір коефіцієнтів відповідає “лінивому” сплеску. Для наступних рівнів деталізації j коефіцієнти $a(j,k)$ визначаються аналогічно, а $c(j,k)$ замінюються різницею між точним і прогнозованим значенням виборки

$$c(1,k) = a(0, 2k+1) - 1/2(a(1,k) + a(1, k+1)).$$

Якщо сигнал $s(t)$ корельований, то більшість коефіцієнтів $c(j,k)$ будуть незначними. Умова збереження середнього значення коефіцієнтів на кожному рівні має вигляд

$$\sum_k a(1,k) = 1/2 \sum_k a(0,k).$$

Поточна підвиборка не задовольняє цієї умови, тому необхідно збільшити (*lifting*) коефіцієнти $a(1,k)$

$$a(1,k) = a(1,k) + 1/4(c(1,k) + c(1, k+1)).$$

На рис. 12 наведена схема ліфтингу, де обчислення виконується без виділення додаткової пам'яті під змінні.

Якщо початкова виборка зберігалася у векторі $s[k]$, то коефіцієнти $a(j,k)$ і $c(j,k)$ зберігаються у комірках $s[2^{-j}k]$. Апроксимації сигналу на кожному рівні j з використанням базової функції $\Lambda(t) = \max\{0, 1 - |x|\}$ визначаються як

$$P_j(t) = \sum_k a(j,k) \Lambda_{j,k}(t), \quad \Lambda_{j,k} = \Lambda(2^j t - k).$$

Різниця між апроксимаціями двох рівнів матиме вигляд

$$P_j(t) - P_{j+1}(t) = \sum_k c(j,k) \cdot \psi_{j,k}(t), \quad \psi_{j,k}(t) = \psi(2^j t - k).$$

Так як коефіцієнти $a(j,k)$ не збільшувалися, то

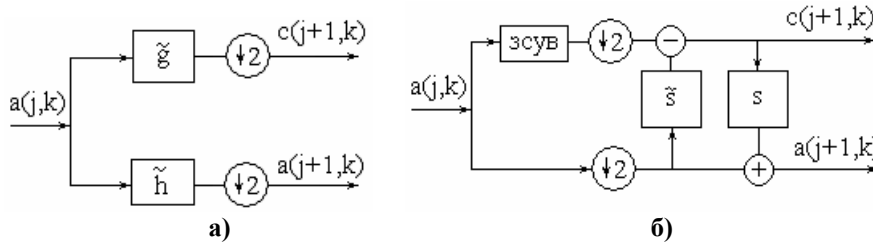


Рис. 11. Швидке сплеск-перетворення: а) традиційна реалізація; б) ліфтингова схема

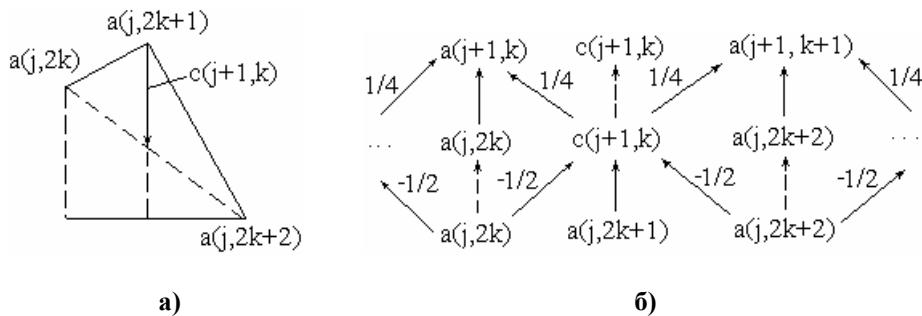


Рис. 12. Схема ліфтингу:

а) обчислення коефіцієнтів $c(j+1,k)$; б) обчислення коефіцієнтів $\psi(j+1,m)$ і збільшення $a(j+1,k)$

вірним вибором сплеску буде $\psi(t) = \Lambda(2t-1)$. З врахуванням збільшення (ліфтингу) сплеск матиме наступний вигляд

$$\psi(t) = \Lambda(2t-1) - 1/4\Lambda(t) - 1/4\Lambda(t+1).$$

Тоді початковий сигнал можна записати як

$$P_o(t) = P_n(t) + \sum_{j=1}^n \sum_k c(j,k) \cdot \psi_{j,k}(t).$$

Таким чином, схема ліфтингу дозволяє виконувати перетворення без виділення додаткової пам'яті, тобто початковий сигнал замінюється сплеск-перетворенням. Розбиття сигналу на кожному кроці на низько і високочастотні смуги, порівняно з традиційними реалізаціями, дозволяє зменшити число операцій з плаваючою крапкою. Перехід від прямого до зворотного перетворень досягається зміною знаків і напрямків на схемі ліфтингу. Схема ліфтингу підтримує адаптацію базових функцій і перетворень на нерегулярно оцифрованих даних.

ХІІІ. Прикладні застосування

13.1. Фізика. Сплески широко використовуються у фізиці для отримання нової інформації, яка недоступна при других підходах [14-17]. Сплески використовуються як в теоретичних роботах з функціонального аналізу (регуляризація калібровочних теорій, конформна теорія поля, нелінійна теорія хаоса) і розв'язування диференціальних рівнянь, так і при аналізі отриманих даних в експериментальних і прикладних роботах (квазікристали, метеорологія, акустика, сейсмологія, нелінійна динаміка в прискорювачах, динаміка рідини і турбулентності, будова поверхонь, потоки космічних променів, сонячний вітер, будова галактик, флуктуації щільності в космології, властивості матерії, гравітаційні хвилі і т.п.). Описання фізичних полів з допомогою сплесків у комплексному просторі дозволяє вивчати їх властивості на основі вивчення властивостей їх джерел [16].

13.2. Тверде тіло і молекули. Точного розв'язку задачі багатьох тіл не існує, тому використовуються різні наближені методи, наприклад теорія функціонала щільності [18]. Електронні спектри атомних систем настільки складні, що звичайні методи не дають задовільних розв'язків, тому були розроблені сплеск-методи розв'язування рівнянь теорії функціоналу щільності [19-22]. Метод описаний в [22] був застосований до різного набору речовин (кристали твердого водню при високих тисках, молекули марганцю і водню, 3-d метали і їх молекули) і показав добру збіжність, а також високу точність результатів. Матрицю щільності було записано з допомогою сплесків Добеші.

13.3. Множинне народження частинок. Вперше сплеск-перетворення застосовано до процесів множинного народження частинок в [23] для діагоналізації кореляційних матриць в спрощених каскадних системах. Потім з допомогою сплесків

вивчалася кореляція частинок у множинному народженні [24] і розпізнавалися образи у фазовому просторі окремих подій множинного народження при зіткненні ядер свинцю при енергіях 158 GeV [25]. З допомогою неперервного сплеску “мексиканський капелюх” (*mhat*) отримано картину, що відповідає кільцевим структурам на цільовій діаграмі. Більш повний двовимірний аналіз із використанням сплесків Добеші (D_8) без процедури усереднення [26] підтвердив попередні висновки.

13.4. Авіація. В аксіальному багатоступеневому компресорі може виникнути помпаж, викликаний турбулентностями поступаючого повітря. Спочатку бульбашки нестабільності відриваються від лопаток (*stall*) і обертаються із швидкістю 60% від швидкості ротора. Тому лопатки доганяють їх і розсікають за 1.6 оберти, що приводить до різкого зниження притоку повітря в камеру згорання за компресором. Високий тиск, створений раніше в камері згорання, може створювати потік у зворотному напрямку через компресор (*surge*). Якщо такий потік виникає, це може спричинити викид полум'я спереду двигуна і вивести його з ладу. Передбачити помпаж з допомогою анемометрів вдається тільки за 10 мс до його виникнення [27], що недостатньо для попередження аварії. Багатомасштабний сплеск-аналіз змін тиску в компресорі газотурбінного двигуна дозволяє передбачити помпаж за 1-2 с до його виникнення [28]. Цей метод можна застосувати для діагностики роботи і збільшення коефіцієнта корисної дії і інших двигунів.

13.5. Медицина і біологія. Застосування сплеск-аналізу в медицині і біології [29] базується на отриманні інформації, яка міститься у функції однієї змінної, наприклад аналіз ритмів серцебиття, електрокардіограм (ЕКГ), електроенцефалограм (ЕЕГ), послідовностей ДНК, або на розпізнаванні образів.

Сплеск-аналіз послідовності часових інтервалів дозволив виявити клінічно значущу міру порушень роботи серця [30]. У пацієнтів реєструвалися послідовності інтервалів між серцебиттями і записувалися як функції від номера інтервалу. Над функціями виконувалися сплеск-перетворення і обчислювалися дисперсії сплеск-коефіцієнтів. Виявилось, що набори дисперсій для здорових і хворих пацієнтів при певних масштабах не перекриваються, що і було прийнято за клінічно важливу характеристику.

Сплеск-аналіз ЕКГ дозволив визначити, що аномальні ефекти проявляються в основному на великих масштабах, а аналіз ЕЕГ дозволив визначити положення джерела епілептичної активності і його поширення в мозку [31].

Сплеск-перетворення використовувалися для аналізу ДНК-послідовностей з метою виявлення природи і походження дальніх кореляцій [32]. Для графічного зображення цих послідовностей у вигляді одномірних кривих використовувалася так званий аналіз “ДНК-блукань” з перетворенням 4-буквого тексту (А-аденін, С-цитозин, G-гуанін, Т-тимідін) в бінарну систему.

Комп'ютерний сплеск-аналіз фотографій кліток крові дозволив отримати чітке зображення границь кліток і на основі цього розробити систему їх автоматичної класифікації [9].

13.6. Стискання даних. Найбільш широко сплеск-перетворення використовуються для стискання графічних даних, що є двовимірними сигналами. Новий стандарт JPEG 2000 [33], замінив існуючий стандарт JPEG в якому використовувалися дискретні косинус перетворення [34]. Існує два підходи до підсмугової декомпозиції двовимірних сигналів: використання двовимірних фільтрів або використання одновимірних фільтрів для окремої обробки рядів, а потім стовпчиків зображень. У JPEG 2000 реалізовано другий підхід.

XIV. Висновки

Таким чином, розглянуто і проаналізовано основні сплеск-перетворення неперервних і дискретних сигналів. За інформацією про більш специфічні конструкції сплеск-базисів, наприклад, комплексні сплески, нелінійні сплески,

мультивейвлети, пакетні вейвлети необхідно звертатися до відповідної літератури [1-5, 14].

Математичні властивості сплесків і реалізація математичного апарату в системах комп'ютерної математики [37], роблять їх потужним і доступним інструментом аналізу і синтезу сигналів. Властивість ортогональності дозволяє отримувати незалежну інформацію на різних масштабах. Властивість нормалізації зберігає величину інформації на різних етапах перетворень. Властивість локалізації дозволяє визначити частоти на яких відбуваються досліджувані явища. Повнота сплеск-базису забезпечує пряме і зворотне сплеск-перетворення. Сплеск-перетворення узагальнюються на множини довільних розмірів і можуть застосовуватися до аналізу багатовимірних об'єктів. Перераховані властивості дозволяють вивчати складні сигнали на різних масштабах і в різних точках.

Дослідження в галузі сплеск-перетворень і їх прикладного застосування є перспективними, тривають і дають важливі теоретичні і практичні результати.

- [1] C.K. Chui. *An introduction to wavelets*. New York: Academic Press (1992).
- [2] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, Philadelphia (1992).
- [3] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, New York (1998).
- [4] E.J. Stollnitz, T.D. Deroose, D.H. Salesin. *Wavelets for computer graphics*. Theory and applications. Morgan Kaufmann, San Francisco (1996).
- [5] P. Wojtaszczyk. *A mathematical introduction to wavelets*. Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [6] А.П. Петухов *Введение в теорию базисов всплесков*. Изд-во СПбГТУ, СПб. (1999).
- [7] А.В. Переберин. О систематизации вейвлет-преобразований // *Вычислительные методы и программирование*, 2, сс. 15-40 (2001).
- [8] В.И. Воробьев, В.Г. Грибунин. *Теория и практика вейвлет преобразований*. ВУС, СПб. (1999).
- [9] И.М. Дремин, О.В. Иванов, В.А. Нечитайло. Вейвлеты и их использование // *Успехи физических наук*, 171(5), (2001).
- [10] В.П. Дьяконов. *Вейвлеты. От теории к практике*. СОЛОН-Р, М. 448 с. (2002).
- [11] V. Sheng. *Wavelet transform*. The transforms and applications handbook. CRC Press, Boca Raton, FL (USA) (1996).
- [12] S.G. Mallat. Multiresolutional approximation and wavelet and orthonormal bases of $l^2(s)$ // *Transaction American Mathematical Society*, 315, pp.69-87 (1989).
- [13] S.G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7), pp. 674-693 (1989).
- [14] Ed. J.C. Van der Berg. *Wavelets in Physics*. Univ. Press, Cambridge (1998).
- [15] C. Bowman, A.C. Newell. // *Rev. Mod. Phys.*, 70, 289 (1998).
- [16] G. Kaiser. Physical wavelets and their sources: real physics in complex spacetime // *J. Phys. A: Math. Gen.*, 36 (2003).
- [17] Li-Zhi Fang, Ronert L. Thews. Wavelets in physics // *University of Arizona*, pp. 228 (1998).
- [18] R.G. Parr, W. Yang. *Density-Functional Theory of Atoms and Molecules*. Oxford Univ. Press, New York (1989).
- [19] S. Wei, M.Y. Chou // *Phys. Rev. Lett.*, 76, 2650 (1997).
- [20] C.J. Tymczak, X. Wang. // *Phys. Rev. Lett.*, 78, 3654 (1997).
- [21] S. Han, K. Cho, J. Ihm. // *Phys. Rev. B*, 60, 1437 (1999).
- [22] O.V. Ivanov, V.P. Antropov // *J. Appl. Phys.*, 85, 4821 (1999).
- [23] P. Carruthers. // *Proc. of Hot and Dense Matter*. Bodrum (1993).
- [24] N. Suzuki, M. Biyajima, A. Ohsawa. // *Prog. Theor. Phys.*, 94, 91 (1995).
- [25] N.M. Astafyeva, I.M. Dremin, K. Kotelnikov. // *A Mod. Phys. Lett. A*, 12, 1185 (1997).
- [26] I.M. Dremin, O.V. Ivanov, S.A. Kalinin et al. // *Phys. Lett. B*, 499, 97 (2001).

- [27] A. Georgantas. *A Review of Compressor Aerodynamic Instabilities*. National Aeronautical Establishment, Canada (1994).
- [28] I.M. Dremine, V.I. Furtelov, O.V. Ivanov et al. // *Controll Eng. Pract.* (2001).
- [29] *Wavelets in Medicine and Biology* (Eds A. Aldroubi, M. Unser) CRC Press, Boca Raton (1996).
- [30] S. Thurner, M.C. Feurstein, M.C. Teich // *Phys.Rev. Lett.*, **80**, 1544 (1998).
- [31] S. Blanco et al. // *IEEE Eng. Med. Biol.*, **16**, 64 (1997).
- [32] A. Arneado et al. // *Physica A*, **254**, 24 (1998).
- [33] ISO/IEC, ISO/IEC 15444-1: *Information technology – JPEG 2000 image coding system*. Part 1. Core coding system (2000).
- [34] W.B. Pennebaker and J.L. Mitchell. *JPEG still image Data Compression Standard*. Van Nostrand Reinhold, New York (1993).
- [35] W. Sweldens. The lifting scheme: A custom-design construction biorthogonal wavelets // *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **3**(2), pp. 186-200 (1996).
- [36] W. Sweldens. The lifting scheme: A construction of second generation wavelets // *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, **1**(2), pp. 511-546 (1998).
- [37] К. Чен, П. Джиблинг, А. Ирвинг. *Matlab в математических исследованиях*. Мир (2001).

D.M. Freik, V.I. Holota

The Analysis of Wavelets Transforms and Their Applied Application (Review)

*'Vasyl Stefanyk' Precarpathian National University,
Shevchenko str., 57, Ivano-Frankivsk, 76000, Ukraine*

The orthonormalized base of vector spaces, concept of wavelets for continuous and discrete signals is considered. It is shown, that multiresolution analyses allow to express scaling functions and wavelets through sets of factors. Use of digital filters and Z-transforms for subband transformations of signals is considered. Feature of biorthogonal transforms is shown. The review of practical application of wavelet transforms is carried out.