

М.А. Рувінський<sup>1</sup>, Б.М. Рувінський<sup>2</sup>

## Електропровідність і флуктуації товщини квантового напівпровідникового дроту

<sup>1</sup>Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,  
вул. Шевченка, 57, м.Івано-Франківськ, 76000, Україна,

<sup>2</sup>Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,  
вул. Карпатська, 15, м.Івано-Франківськ, 76000, Україна, [bruvinsky@gmail.com](mailto:bruvinsky@gmail.com)

Визначено час релаксації, рухливість електронів і статичну електропровідність, зумовлені флуктуаціями товщини квантового напівпровідникового дроту. Для невідродженої статистики носіїв струму при достатньо низьких температурах (Т) рухливість електронів  $u_n \propto T^{1/2}$ . У граничному випадку сильного магнітного поля  $H$ , напрямленого вздовж осі дроту, рухливість визначається множителем  $H^{-1/2}$ . Показано, що розглянутий механізм релаксації носіїв заряду є важливим для електропровідності достатньо тонкого і чистого дроту при низьких температурах. Чисельні розрахунки проведено для дроту з GaAs.

**Ключові слова:** квантовий напівпровідниковий дріт, гауссівські флуктуації товщини, рухливість, статична електропровідність, GaAs.

Стаття поступила до редакції 10.02.2006; прийнята до друку 15.05.2006.

### Вступ

Квантування електронного енергетичного спектра суттєво обмежує поперечний рух електронів і дірок в тонкому напівпровідниковому дроті. Такі квантово-розмірні обмеження яскраво виявляються в електропровідності, яка визначається типом механізму розсіяння носіїв струму в квазіодномірних системах, цікавих для наноелектроніки. Існуючі сучасні технології не виключають можливості механізму розсіяння електронів і дірок на флуктуаціях товщини квантового напівпровідникового дроту. Метою роботи є визначення впливу таких флуктуацій на електропровідність і порівняння з іншими механізмами розсіяння, відомими з літературних даних [1-5].

### I. Модель квантового дроту і час релаксації електронів на гауссівських флуктуаціях товщини дроту

Розглянемо модель квантового напівпровідникового дроту з поперечними розмірами, обмеженими за товщиною  $d$  (в напрямку координатної осі  $z$ ) одномірною потенціальною ямою  $V(z)$  з нескінченно високими стінками і за шириною (в напрямку  $y$ ) параболічним потенціалом  $\beta y^2$  ( $\beta > 0$ ). Постійне магнітне поле  $H$  напрямлено вздовж осі  $x$  дроту; складові векторного потенціала магнітного поля:  $A_x = A_y = 0$ ,  $A_z = H y$ .

В одноелектронному наближенні [4] гамільтоніан системи має такий вигляд

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_{\perp}} \Delta_{\perp} + \frac{1}{2m_z} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} + \frac{e}{c} A_z \right)^2 + V(z) + \beta y^2 + U(\vec{r}_{\perp}), \quad (1)$$

де  $\Delta_{\perp} = \partial/\partial x^2 + \partial/\partial y^2$ ,  $m_{\perp} = m_x = m_y = m$  і  $m_z$  – ефективні маси електрона провідності вздовж відповідних напрямків,  $e$  – абсолютна величина заряду електрона;

$$V(z) = \begin{cases} 0, & -d/2 \leq z \leq d/2, \\ \infty, & z < -d/2, z > d/2; \end{cases} \quad (2)$$

$$U(\vec{r}_{\perp}) = \alpha [\xi_1(\vec{r}_{\perp}) - \xi_2(\vec{r}_{\perp})] \quad (3)$$

– потенціальна енергія електрона у випадковому

полі, зумовленому флуктуаціями товщини дроту; ( $\alpha = \partial E_c / \partial d$ ,  $E_c$  – дно зони провідності,  $\xi_{1,2}(\vec{r}_\perp)$  – випадкові функції, які визначають амплітуди коливань на різних поверхнях дроту, перпендикулярних осі  $z$ . Взаємодію (3) носія струму із випадковим полем вважаємо збуренням, що спричинює квантові переходи у трансляційному русі вздовж дроту (в напрямку осі  $x$ ). Обмежимося внеском в електропровідність нижнього квантово-розмірного рівня енергії поперечного руху електрона. У наближенні врахування станів електрона з певною парністю по осі  $z$  хвильова функція незбуреної задачі має вигляд:

$$\Psi_{k_x}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi^{1/2} L d y_0}} \exp\left(ik_x x - \frac{y^2}{2y_0^2}\right) \cos \frac{\pi}{d} z, \quad (4)$$

де  $L$  – довжина дроту ( $L \gg d$ ),

$$y_0 = \hbar^{1/2} \left[ 2m \left( \beta + \frac{e^2 H^2}{2m_z c^2} \right) \right]^{-1/4}. \quad (5)$$

Енергія електрона у стані (4):

$$E(k_x) = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_z d^2} + \hbar \left[ \frac{1}{2m} \left( \beta + \frac{e^2 H^2}{2m_z c^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

Обернений час релаксації електрона вздовж дроту при розсіянні флуктуаційним полем (3)

$$\frac{1}{\tau_n(k_x)} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{k'_x} \langle \langle | \langle k'_x | U | k_x \rangle |^2 \rangle \rangle \left( 1 - \frac{k'_x}{k_x} \right) \delta[E(k_x) - E(k'_x)], \quad (7)$$

де подвійні дужки  $\langle \langle \dots \rangle \rangle$  мають зміст усереднення за випадковим полем. Флуктуації на різних поверхнях дроту вважаємо статистично незалежними, а на одній поверхні – гауссовими:

$$\langle \langle \xi_i(\vec{r}_{\perp 1}) \xi_j(\vec{r}_{\perp 2}) \rangle \rangle = \delta_{ij} \Delta_i^2 \exp\left[ -\frac{(\vec{r}_{\perp 1} - \vec{r}_{\perp 2})^2}{2\Delta_i^2} \right], \quad (8)$$

$$\langle \langle \xi_i(\vec{r}_{\perp}) \rangle \rangle = 0, \quad i, j = 1, 2.$$

Після обчислень (7) з урахуванням (3) і (8) знаходимо остаточний результат для часу релаксації:

$$\frac{1}{\tau_n(k_x)} = \frac{\alpha^2 m \sqrt{2\pi}}{\hbar^3 |k_x|} \sum_{i=1}^2 \frac{(\Delta_i \Lambda_i)^2}{\sqrt{y_0^2 + \Lambda_i^2}} \exp(-2\Lambda_i^2 k_x^2). \quad (9)$$

## II. Провідність і рухливість електронів, зумовлені флуктуаціями товщини дроту

Для електронної провідності з кінетичного рівняння Больцмана у наближенні часу релаксації [4] маємо

$$\sigma_n = \frac{2\hbar^2 e^2}{m^2} \int_0^\infty \left( -\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) k_x^2 \tau_n(|k_x|) dk_x, \quad (10)$$

де  $f_0 = [\exp((\varepsilon_{k_x} - \mu)/k_B T) + 1]^{-1}$  – функція розподілу Фермі-Дірака,  $\varepsilon_{k_x} = (\hbar k_x)^2 / 2m$  – кінетична енергія руху електрона з ефективною масою  $m$  вздовж дроту,  $\mu$  – хімічний потенціал, відрахований від квантово-розмірного рівня руху електрона поперек дроту;  $2 \sum_{k_x} f_0(k_x) = N$  – повне

число електронів дроту.

Для невиродженого випадку напівпровідниково-го дроту після підстановки (9) в (10) і проведення

розрахунку отримаємо:

$$\sigma_n = \frac{\pi e^2 \hbar^3 n}{m^2 k_B T (2\pi m k_B T)^{1/2}} \frac{\Phi(-x, 2, a(T))}{4A_1 (\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2)^2}, \quad (11)$$

де

$$x = \frac{A_2}{A_1}, \quad A_i = \frac{\alpha^2 m \sqrt{2\pi}}{\hbar^3} \frac{(\Delta_i \Lambda_i)^2}{\sqrt{y_0^2 + \Lambda_i^2}}, \quad (i = 1, 2); \quad (12)$$

$$a(T) = \frac{\gamma(T) - 2\Lambda_1^2}{2(\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2)}, \quad \gamma(T) = \frac{\hbar^2}{2m k_B T}; \quad (13)$$

$$\Phi(-x, 2, a) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^s}{(s+a)^2}, \quad (14)$$

причому  $a > 0$ ,  $x \leq 1$  [6];  $n = N/L$  – число електронів на одиниці довжини дроту.

При  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$  і довільних  $x$

$$\sigma_n = \frac{\pi e^2 \hbar^3 n}{m^2 k_B T (2\pi m k_B T)^{1/2}} \cdot \frac{(A_1 + A_2)^{-1}}{[\gamma(T) - 2\Lambda^2]^2}. \quad (15)$$

Формули (11)-(15) дійсні при  $\gamma(T) > 2\Lambda_i^2$ ,  $[\gamma(T) - 2\Lambda_i^2](\pi/\ell)^2 \gg 1$ , де  $\ell$  – стала ґратки вздовж осі дроту. Перша умова пов'язана з тим, що час релаксації (9) експоненціально зростає з енергією електрона, а максвеллівський розподіл експоненціально спадає. Тому для ефективного розсіяння на гауссових флуктуаціях важливим є те, щоб "теплова" довжина хвилі де-Бройля носія заряду перевищувала величину кореляційного радіуса  $\Lambda_i$ . Друга умова пов'язана з вибором нескінченної верхньої межі в інтегралі (10) і звичайно виконується в реальній ситуації.

У випадку низьких температур, коли

$$\gamma(T) \gg 2\Lambda^2, \quad \text{або } k_B T \ll (\hbar^2 / 4m\Lambda^2), \quad (16)$$

рухливість електрона вздовж осі дроту

$$u_n = \frac{2\sqrt{2\pi}e}{\hbar(A_1 + A_2)\sqrt{m}}(k_B T)^{1/2}, \quad (17)$$

і механізм розсіяння на флуктуаціях товщини стає суттєвим для невиродженого напівпровідникового дроту у низькотемпературній області ( $u_n \propto T^{1/2}$ ). За температурною залежністю рухливості це нагадує дипольне розсіяння [5] для тривимірних напівпровідникових матеріалів.

При достатньо високих температурах

$$k_B T \geq \hbar^2 / 4m\Lambda^2, \quad (18)$$

або достатньо великих радіусах флуктуацій  $\Lambda$ , величина рухливості сильно зростає, і розглянутий механізм виявляється неістотним у порівнянні з розсіянням на поздовжніх акустичних (LA)-фононах [2].

Залежності  $\sigma_n$  та  $u_n$  від поздовжнього магнітного поля  $H$  пов'язані зі стиском хвильової функції електрона поперек дроту (по осі  $y$ ) і визначаються множником

$$A_i(H) \propto (y_0^2(H) + \Lambda_i^2)^{-1/2}, \quad (19)$$

див. (12) і (5). При умові  $y_0^2(H) \gg \Lambda_i^2$  і в граничному випадку сильного магнітного поля,  $(e^2 H^2) / 2m_z c^2 \gg \beta$  це призводить в  $\sigma_n$  і  $u_n$  до множника  $H^{-1/2}$ .

В роботі [2] досліджувалась температурна залежність статичної електропровідності напівпровідникового квантового дроту в ізоляторі, зумовленої взаємодією невироджених електронів з поздовжніми акустичними фононами матриці (при нехтуванні розмиттям хвильової функції електрона у поперечному напрямку і у відсутності магнітного поля). При цьому, на відміну від розглянутого нами механізму релаксації, в [2] отримано температурну залежність рухливості електронів  $u_n \propto T^{-5/2}$ . Невироджений випадок статистики електронів має місце при температурі  $T > \pi(\hbar n)^2 / 2k_B m$ .

Для виродженої системи і в граничному випадку низьких температур, коли  $(k_B T / \mu) \ll 1$ , електропровідність вздовж осі дроту

$$\sigma_n \approx \frac{4e^2 \mu}{\hbar^2} [A_1 \exp(-2k_F^2 \Lambda_1^2) + A_2 \exp(-2k_F^2 \Lambda_2^2)]^{-1} \quad (20)$$

де  $k_F^2 = (2m / \hbar^2) \mu$ . Температурна залежність  $\sigma_n$  визначається хімічним потенціалом одновимірного електронного газу

$$\mu(T) \approx \mu_0 \left[ 1 + \frac{\pi}{12} \left( \frac{k_B T}{\mu_0} \right)^2 \right], \quad (21)$$

$$\mu_0 = \frac{\hbar^2}{8m} (\pi n)^2. \quad (22)$$

### III. Обговорення результатів для дроту GaAs

Для GaAs при одномірній концентрації електронів  $n = 1,6 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$  і ефективній масі електрона  $m = 0,067 m_0$  електронний газ є невиродженим при температурі  $T > 5,3 \text{ K}$ . На рис. 1 наведено оцінки рухливості електронів  $u_n = \sigma_n / en$  (при  $H = 0$ ) невиродженого і відносно чистого напівпровідникового дроту при різних механізмах розсіяння: на поздовжніх акустичних LA-фононах [2] (крива 1) і на флуктуаціях товщини дроту (криві 2,3) для параметрів GaAs (густина маси  $\rho = 5,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , поздовжня швидкість звуку

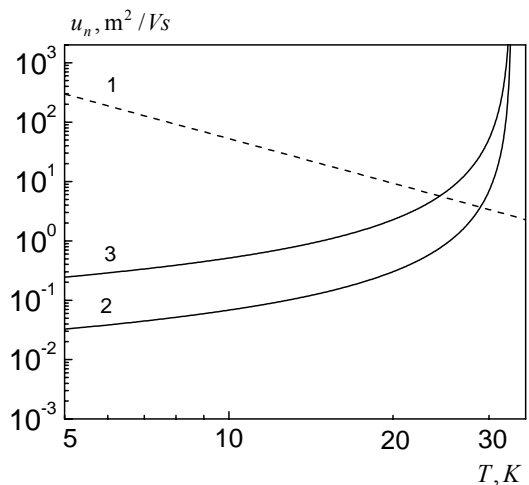


Рис. 1. Рухливість електронів вздовж невиродженого напівпровідникового дроту GaAs ( $H = 0$ ): 1 – розсіяння на LA-фононах; 2,3 – розсіяння на флуктуаціях квантового дроту товщиною  $d = 5 \cdot 10^{-9}$  (2) і  $7 \cdot 10^{-9}$  м (3).

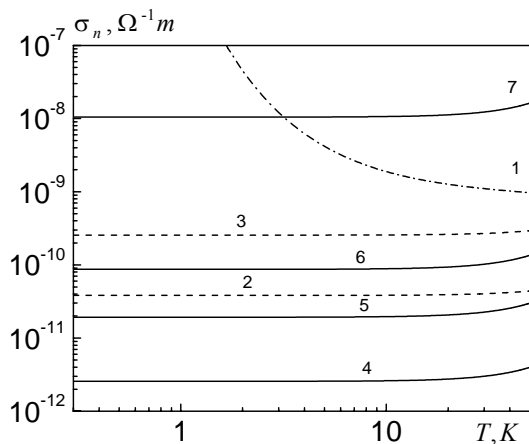


Рис. 2. Провідність вздовж виродженого напівпровідникового дроту GaAs ( $H = 0$ ): 1 – акустоп'єзоелектричне розсіяння; 2,3 – домішкове розсіяння при  $\mu_{\text{imp}} = 7,5$  (2) і  $50 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$  (3); 4-7 – розсіяння на флуктуаціях дроту товщиною  $d = 5 \cdot 10^{-9}$  (4),  $7 \cdot 10^{-9}$  (5),  $9 \cdot 10^{-9}$  (6),  $2 \cdot 10^{-8}$  м (7).

$v = 5,2 \cdot 10^3$  м/с, константа деформаційного потенціалу  $C = 2,2 \cdot 10^{-18}$  Дж; товщина дроту  $d = 5 \cdot 10^{-9}$ ,  $7 \cdot 10^{-9}$  м,  $\alpha = -\pi^2 \hbar^2 / md^3$ ,  $\Delta_1 = \Delta_2 = 3 \cdot 10^{-10}$  м,  $y_0 = \Lambda = 1 \cdot 10^{-8}$  м. З рис. 1 випливає, що механізм релаксації носіїв заряду на випадкових нерівностях границь дроту може бути суттєвим у порівнянні з розсіянням на акустичних фонах при товщинах  $d \leq 7 \cdot 10^{-9}$  м в області низьких температур при  $k_B T < \hbar^2 / 4m\Lambda^2$ .

На рис. 2 наведено розраховані температурні залежності електропровідності вздовж виродженого дроту на основі GaAs у граничному випадку низьких температур для механізмів: акусто-п'єзоелектричного розсіяння [3] ( $\sigma_{n,ph}$  – крива 1), домішкового розсіяння [3] ( $\sigma_{imp}$  – криві 2,3 для значень низькотемпературної рухливості двовимірного руху у відсутності магнітного поля і потенціалу конфінаменту  $\mu_{imp} = 7,5, 50$  м<sup>2</sup>/В·с відповідно) і розглянутого механізму релаксації згідно (20)-(22) при товщинах  $d = 5 \cdot 10^{-9}, 7 \cdot 10^{-9}, 9 \cdot 10^{-9}, 2 \cdot 10^{-8}$  м (криві 4-7) при вказаних вище значеннях параметрів GaAs, де константа п'єзоелектричної взаємодії  $P = 5,4 \cdot 10^{-20}$  Дж<sup>2</sup>/м<sup>2</sup> і  $k_{F0} = \sqrt{2m\mu_0} / \hbar = 1 \cdot 10^{-8}$  м<sup>-1</sup>.

При цьому  $\sigma_{n,ph} \propto [k_F / (4k_F^2 C^2 + P)] \cdot \exp(2\hbar k_F v / k_B T)$  і  $\sigma_{imp} \propto \mu_{imp} k_F^2$  [3]. Оптичні фонони дають внесок, який можна порівняти із внеском акустичних фонів, при температурі

$T \geq 50$  К [3]. Ефекти типу локалізації [1], що виникають в квазіоднорічних системах при сильній неупорядкованості (або при дуже великій концентрації домішок), які не можна пояснити в теорії слабкого розсіювання, в нашій роботі не розглядаються. Отримані в даній роботі температурні залежності провідності суттєво відрізняються від наслідків теорії локалізації [1] (зокрема, для останньої характерним є перехід електропровідності при певній температурі  $T_0$  від степеневий залежності при  $T > T_0$  до експоненціальної при  $T < T_0$ ).

## Висновки

1. Показано, що механізм розсіювання носіїв струму на гауссових флуктуаціях товщини напівпровідникового квантового дроту дає істотний внесок в електропровідність достатньо тонкого і чистого дроту при низьких температурах.
2. Квантово-розмірні ефекти і статистика носіїв струму в значній мірі визначають величину і температурні залежності рухливості і провідності.
3. Для невиродженого дроту і граничного випадку сильного поздовжнього магнітного поля  $H$  рухливість електронів  $u_n \propto (T/H)^{1/2}$ .

**Рувінський М.А.** – д.ф.-м.н., професор кафедри фізики і хімії твердого тіла.  
**Рувінський Б.М.** – к.ф.-м.н., доцент кафедри фізики новітніх технологій.

- [1] Й. Имри. *Введение в мезоскопическую физику*. Физматлит, М. 304 с. (2002).
- [2] Н.А. Поклонский, Е.Ф. Кисляков, С.А. Върко. О температурной зависимости статической электропроводности полупроводниковой квантовой проволоки в изоляторе // *ФТП*, **37**(6), сс. 735-737 (2003).
- [3] H. Bruus, K. Flensberg, H. Smith. Magnetoconductivity of quantum wires with elastic and inelastic scattering // *Phys. Rev. B.*, **48**(15), pp. 11144-11155 (1993).
- [4] А.И. Ансельм. *Введение в теорию полупроводников*. Наука, М. 616 с. (1978).
- [5] Б. Ридли. *Квантовые процессы в полупроводниках*. Мир, М., 304 с. (1986).
- [6] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. *Интегралы и ряды. Элементарные функции*. Наука, М. 800 с. (1981).

М.А. Ruvinskii<sup>1</sup>, В.М. Ruvinskii<sup>2</sup>

## Electroconductivity and Thickness Fluctuations of Quantum Semiconductor Wire

<sup>1</sup>Vasyl Stefanyk' Precarpathian National University,  
 57 Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk, 76000, Ukraine  
<sup>2</sup>Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas,  
 15, Carpatska Str., Ivano-Frankivsk, 76000, Ukraine, [bruvinsky@gmail.com](mailto:bruvinsky@gmail.com)

The relaxation time, electron mobility and static electroconductivity caused by the thickness fluctuation of quantum semiconductor wire are determined. For nondegenerate statistics of carriers at sufficiently low temperatures the electron mobility  $u_n \sim T^{1/2}$ . In a limiting case of a strong magnetic field  $H$ , directional along length of a wire, in mobility there is a factor  $H^{-1/2}$ . It is shown that reviewed mechanism of charge carriers relaxation is important for the electroconductivity of rather thin and pure wire at low temperatures. The numerical calculations have been fulfilled for GaAs wire.