

М.А. Рувінський<sup>1</sup>, Б.М. Рувінський<sup>2</sup>

## Процеси Ландау-Румера і двофононного розпаду гіперзвукових квантів у прямокутному квантовому дроті

<sup>1</sup>Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,  
вул.Шевченка, 57, м.Івано-Франківськ, 76000, Україна,

<sup>2</sup>Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,  
вул.Карпатська, 15, м.Івано-Франківськ, 76000, Україна,  
[bruvinsky@gmail.com](mailto:bruvinsky@gmail.com)

Для випадку прямокутного квантового дроту розглянуто механізми процесів Ландау-Румера і двофононного розпаду звукових квантів. Розраховано коефіцієнти поглинання обмежених акустичних фононів гіперзвуку найнижчої гібридної ширинної моди для дроту GaAs з вільною поверхнею і різними поперечними розмірами. Проведено порівняння фононного і електронного механізмів поглинання гіперзвуку в прямокутному дроті і безмежному твердому тілі. Врахування кубічного ангармонізму у дроті призводить в граничному випадку низьких температур до експоненціальної температурної залежності поглинання гіперзвуку для процесу Ландау-Румера і переважаючого поглинання за рахунок розпадного процесу з пониженням степеня його частотної залежності. При достатньо високих температурах фононне поглинання переважає електронне поглинання у невиродженому квантовому дроті.

**Ключові слова:** прямокутний квантовий дрот, обмежені акустичні фонони, гіперзвук, GaAs.

*Стаття поступила до редакції 12.07.2006; прийнята до друку 10.10.2006.*

### Вступ

Акустичні методи широко використовуються у фізиці твердого тіла і різноманітних галузях науки і техніки. При цьому зростає роль квантової акустики, пов'язаною з поширенням височастотних гіперзвукових хвиль [1-4]. Основні ідеї відносно механізмів поглинання гіперзвуку, пов'язаних з фонон-фононною взаємодією при  $\omega \gg 1$ , містяться в роботах Ландау і Румера [5] і Слонімського [6], де у наближенні кубічного ангармонізму і в ізотропному об'ємному випадку вперше розглянуті трифононні процеси "приєднання" звукового кванта до теплового фонона з народженням нового теплового фонона ("механізм Ландау-Румера") і спонтанний розпад звукового кванта на два фонони ( $\omega$  – частота звуку,  $\tau$  – час життя фонона в кристалі). Наступна множина дуже важливих уточнюючих та узагальнюючих теоретичних та експериментальних робіт для тривимірної речовини складає зміст оригінальних монографій та оглядів [1-4]. При достатньо низьких температурах  $\Theta \ll \hbar\omega$  у поглинанні гіперзвуку переважає двофононний процес розпаду [1,2,4,6-11] з передбаченою в [6] частотною залежністю  $\omega^5$ , що вперше було експериментально підтверджено для

кристалів CaF<sub>2</sub> в роботах [10,11].

Досягнення сучасних технологій стимулюють дослідження акустичних властивостей низькорозмірних матеріалів [12,13]. В роботі [14] було розглянуто електронний механізм [1] поглинання гіперзвуку в моделі прямокутного квантового дроту – однієї з можливих структур мезо- і наноелектроніки. Метою даної роботи є вивчення фононного механізму поглинання гіперзвуку в прямокутному квантовому дроті. Найважливішою особливістю тонкого дроту є наявність в ньому квантово-розмірних обмежень для фононів, які будемо називати "обмеженими фононами" на відміну від об'ємних (безмежних) фононів масивних кристалів [15]. В нашій роботі враховано кубічний ангармонізм обмежених акустичних фононів прямокутного квантового дроту. Чисельні розрахунки проведені нами для дроту GaAs різних поперечних розмірів.

### I. Дисперсійне рівняння для обмежених акустичних фононів гібридних ширинних мод

Розглянемо модель прямокутного дроту з вільною поверхнею і необмеженою довжиною в

напрямку осі  $z$ , товщиною  $2a$  вздовж осі  $x$  і шириною  $2d$  в напрямку осі  $y$ . Початок координат обрано у площині  $xu$ , в геометричному центрі поперечного перерізу прямокутного дроту ( $-a \leq x \leq a$ ,  $-d \leq y \leq d$ , довжина дроту  $L \gg 2a$ ,  $2d$ ). Точного аналітичного розв'язку задачі теорії пружності для довільної прямокутної геометрії дроту не існує [16,17]. Скористаємось методом наближеного розділення змінних у розв'язках для складових вектора  $u$  зміщень і у граничних умовах

$$u_x = \left( \frac{q}{k_1} A \cos(k_1 y) + C \cos(k_2 y) \right) \sin(qx) \exp[i\gamma(z - ct)] , \quad (1)$$

$$u_y = (A \sin(k_1 y) + B \sin(k_2 y)) \cos(qx) \exp[i\gamma(z - ct)] , \quad (2)$$

$$u_z = i \left( -\frac{\gamma}{k_1} A \cos(k_1 y) + \frac{1}{\gamma} (k_2 B + qC) \cos(k_2 y) \right) \cos(qx) \exp[i\gamma(z - ct)] , \quad (3)$$

де  $\gamma = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – довжина хвилі,  $\gamma$  – складова хвильового вектора в напрямку осі  $z$  дроту,  $c$  – фазова швидкість звуку,

$$k_1^2 + q^2 = \gamma^2 \eta_1^2, \quad \eta_1 = \sqrt{(c/c_d)^2 - 1}, \quad (4)$$

$$k_2^2 + q^2 = \gamma^2 \eta_2^2, \quad \eta_2 = \sqrt{(c/c_s)^2 - 1}, \quad (5)$$

$c_d$  і  $c_s$  – швидкість поздовжнього і поперечного звуку. Для вільної поверхні ширинні моди визначаються відповідними граничними умовами: нульовими значеннями компонент тензора напружень

$$\sigma_{yy}, \quad \sigma_{xy} \quad \text{і} \quad \sigma_{zy} \quad \text{при} \quad y = \pm d \quad (6)$$

$$\sigma_{xx}, \quad \sigma_{yx} \quad \text{і} \quad \sigma_{zx} \quad \text{при} \quad x = \pm a, \quad (7)$$

при цьому в (7) для ширинних мод дві останні умови для  $\sigma_{yx}$  і  $\sigma_{zx}$  при  $x = \pm a$  виконуються наближено. Тензор напружень  $\sigma_{ik}$  визначається через тензор деформації  $u_{ik}$  згідно [18]:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1 + \sigma} \left( u_{ik} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} u_{\ell\ell} \delta_{ik} \right), \quad (8)$$

де  $E$  – модуль Юнга,  $\sigma$  – коефіцієнт Пуассона; в (8) за "німим" індексом  $\ell \equiv (x, y, z)$  відбувається підсумовуванням. Для випадку малих деформацій тензор деформації

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (9)$$

З граничних умов (6) і формул (8), (9) випливає лінійна система однорідних рівнянь для амплітуд  $A$ ,  $B$  і  $C$  ширинних мод. Значення  $q$  можна визначити лише з однієї умови (7)  $\sigma_{xx}|_{x=\pm a} = 0$ , оскільки для випадку  $(d/a) \geq 2$  вже наближено виконуються дві інші умови  $\sigma_{yx}|_{x=\pm a} \approx 0$  і  $\sigma_{zx}|_{x=\pm a} \approx 0$ . Тоді

$$qa = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

і основний ширинній моді відповідає  $n = 0$ , тобто

для компонент тензора напружень  $\sigma_{ik}$ , запропонованим Морсом [16] і дійсним при  $(d/a) \geq 2$ . Згідно [16,17] існує система ширинних і товщинних гібридних акустичних мод, що підтверджено експериментально [16]. При цьому найнижчими за енергією є ширинні моди, оскільки ширина є більшою за товщину розглянутого дроту. Складові вектора зміщень  $u$  для ширинних мод шукаємо у вигляді:

$$q = 0.$$

Умова квантування акустичних фононних мод має вигляд [17]

$$\frac{1}{4ad} \int_{-a}^a dx \int_{-d}^d dy (u_x^* u_x + u_y^* u_y + u_z^* u_z) = \frac{\hbar}{2M\omega_\gamma}, \quad (11)$$

де  $\omega_\gamma = c\gamma$  – частота ширинної моди з хвильовим вектором  $\gamma$  в напрямку осі  $z$  дроту,  $M$  – маса дроту.

Закони дисперсії  $\omega_\gamma$  можна визначити з умови існування нетривіального розв'язку лінійної системи однорідних рівнянь для амплітуд  $A$ ,  $B$  і  $C$  ширинних мод (при  $k_2 \neq 0$ ). Дисперсійне рівняння має вигляд

$$\frac{\text{tg}(\pi\sqrt{\chi - \psi})}{\text{tg}(\pi\sqrt{\delta\chi - \psi})} = -\frac{\psi\sqrt{\chi - \psi}\sqrt{\delta\chi - \psi}}{(0,5\chi - \psi)^2}, \quad (12)$$

де

$$\omega_\gamma = \frac{\pi c_s}{d} \sqrt{\chi}, \quad \gamma = \frac{\pi}{d} \sqrt{\psi - \left( \frac{dq}{\pi} \right)^2}, \quad (13)$$

$$\delta = (c_s/c_d)^2 = (1 - 2\sigma)/2(1 - \sigma). \quad (14)$$

Внаслідок періодичності тригонометричних функцій в (12) існують кратні розв'язки для частоти обмежених фононів  $\omega_{\gamma m} = c_m \gamma$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) при фіксованому  $\gamma$  і  $n$  (тобто  $q$ ). Крім можливої дисперсії фазової швидкості  $c_m(\gamma)$ , характерним для гібридних мод є наявність одночасно поздовжніх і поперечних компонент вектора зміщень  $u$  (див. форм.(1)-(3)). На рис. 1 а і б показані дисперсійні криві, розраховані згідно (12)-(14) для двох найнижчих ширинних мод ( $q = 0, m = 1, 2$ ) гібридних акустичних фононів прямокутного хвильоводу – квантового дроту GaAs з поперечними розмірами  $2a \times 2d = 28,3\text{\AA} \times 56,6\text{\AA}$ (а) і  $50\text{\AA} \times 150\text{\AA}$ (б) ( $c_d = 5,2 \cdot 10^5$  см/с,  $c_s = 3,0 \cdot 10^5$  см/с [19]).

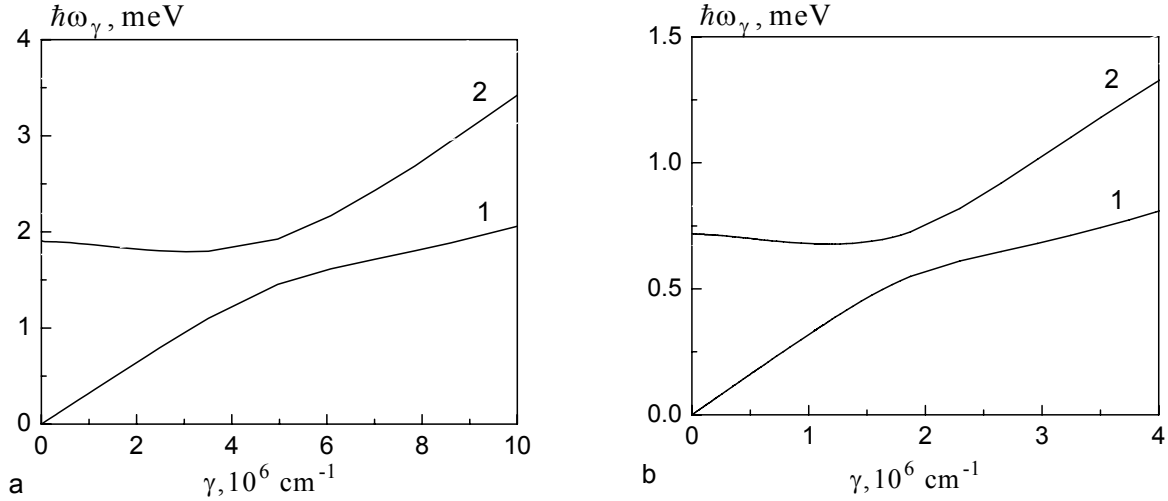


Рис. 1. Дисперсійні криві 1, 2 для найнижчих ширинних мод акустичних фононів квантового дроту GaAs: а)  $28,3\text{Å} \times 56,6\text{Å}$ , б)  $50\text{Å} \times 150\text{Å}$ .

## II. Енергія збурення і коефіцієнт поглинання гіперзвуку

Для врахування кубічного ангармонізму слід розглянути вираз для густини пружної енергії з точністю до членів третього порядку включно відносно тензора скінченної деформації  $u_{ij}$  [18]

$$W = \frac{1}{2} c_{ijkl} u_{ij} u_{kl} + c_{ijklmn} u_{ij} u_{kl} u_{mn}, \quad (15)$$

де тензори  $c_{ijkl}$  і  $c_{ijklmn}$  визначають пружні сталі

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} c_{11}(u_{11}^2 + u_{22}^2 + u_{33}^2) + 2c_{44}(u_{23}^2 + u_{13}^2 + u_{12}^2) + c_{12}(u_{11}u_{22} + u_{22}u_{33} + u_{33}u_{11}) + \\ & \frac{1}{6} c_{111}(u_{11}^3 + u_{22}^3 + u_{33}^3) + \frac{1}{2} c_{112}[u_{11}^2(u_{22} + u_{33}) + u_{22}^2(u_{33} + u_{11}) + u_{33}^2(u_{11} + u_{12})] + \\ & 2c_{144}(u_{11}u_{32}^2 + u_{22}u_{13}^2 + u_{33}u_{12}^2) + 2c_{166}[u_{23}^2(u_{22} + u_{33}) + u_{13}^2(u_{33} + u_{11}) + u_{12}^2(u_{11} + u_{22})] + \\ & c_{123}u_{11}u_{22}u_{33} + 8c_{456}u_{23}u_{13}u_{12}. \end{aligned} \quad (18)$$

Після підстановки (16), (17) у (18) залишаємо лише члени, кубічні відносно  $\zeta_{ij}$ . Квантовані вектори зміщень

$$\hat{u}_i = u_i \{ \hat{b}_\gamma \exp[i\gamma(z - ct)] + \text{h.c.} \}, \quad (19)$$

де  $\hat{b}_\gamma$  і  $\hat{b}_\gamma^+$  – оператори знищення і народження обмежених фононів. У наближенні кубічного ангармонізму (після підстановки (16), (17) у (18)) при заміні

$$\zeta_{ij} \rightarrow \hat{\zeta}_{ij} = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \quad (20)$$

отримаємо оператор густини енергії  $\hat{W}$ , який описує трифононні процеси.

другого і третього порядку відповідно,

$$u_{ij} = \frac{1}{2} (\zeta_{ij} + \zeta_{ji} + \zeta_{ki} \zeta_{kj}), \quad (16)$$

$$\zeta_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (17)$$

В (15), (16) мається на увазі підсумовування за правилом Ейнштейна ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Для кристала кубічної симетрії

## Механізм Ландау-Румера

Процес поглинання звуку розглядаємо [1,5] як результат зіткнення квантів звуку найнижчої моди з частотою  $\omega_\gamma = c\gamma$  дисперсійної кривої 1 рис. 1 а, б з тепловими квантами моди 2 з частотою  $\omega_{1\gamma_1} = c_1\gamma_1$

(рис. 1 а, б). Для цього в  $\hat{W}$  покладемо

$$\hat{\zeta}_{ij} = \hat{\zeta}_{ij}^{(1)} + \hat{\zeta}_{ij}^{(2)} + \hat{\zeta}_{ij}^{(s)}, \quad (21)$$

де  $\hat{\zeta}_{ij}^{(1)}$  і  $\hat{\zeta}_{ij}^{(2)}$  відносимо до теплових хвиль моди 2, а  $\hat{\zeta}_{ij}^{(s)}$  – до звукової хвилі моди 1 (рис. 1 а, б).

Розглянутий підхід відповідає випадку [5], коли

$\gamma\ell \gg 1$ , де  $\ell$  – середня довжина вільного пробігу фононів в напрямку осі дроту.

Нехай в деякому початковому стані теплової хвилі представлені числами заповнення фононів  $N_1$ ,  $N_2$ , а звукова хвиля – числом  $N$ . Кінцевий стан, що відповідає поглинанню звуку, визначається числами  $N-1$ ,  $N_1-1$ ,  $N_2+1$ . Для оберненого процесу має місце перехід  $N, N_1, N_2 \rightarrow N+1, N_1+1, N_2-1$ . Поглинання звуку визначається різницею імовірностей цих переходів у першому порядку нестационарної теорії збурень. Основне наближення [5], яке використовується при розрахунку

матричних елементів переходу

$$\int_{-a}^a dx \int_{-d}^d dy \int_{-L/2}^{L/2} dz \langle N-1, N_1-1, N_2+1 | \hat{W} | N, N_1, N_2 \rangle, \quad (22)$$

$$\int_{-a}^a dx \int_{-d}^d dy \int_{-L/2}^{L/2} dz \langle N+1, N_1+1, N_2-1 | \hat{W} | N, N_1, N_2 \rangle,$$

і повної імовірності поглинання полягає в тому, що хвильові числа звукової хвилі покладаються малими у порівнянні з хвильовими числами теплових хвиль:

$$\gamma, k_{1,2} \ll \gamma_{1,2}, Q_{1,2}. \quad (23)$$

Після обчислень знаходимо остаточний для коефіцієнта фононного поглинання за механізмом Ландау-Румера:

$$\alpha_{ph}^{(a)} = \frac{\hbar}{2\rho^3 ad} \cdot \frac{1}{\omega_\gamma |B_\gamma|} \sum_i \frac{|M(\gamma, k_1, k_2, \gamma_i^*)|^2}{\omega_{\gamma_i^*}^2 |B_{\gamma_i^*}^{(1)}|^2} \frac{\left[ \left( -\frac{\partial \bar{N}_1}{\partial \omega_1} \right)_{\gamma_i^*} \right]}{\left[ \left( \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \gamma_i^2} \right)_{\gamma_i^*} \right]} \cdot 8,686 \text{ дБ/см}, \quad (24)$$

де  $\rho$  – густина маси дроту,  $\gamma_i^*$  – прості корені рівняння

$$\frac{\omega_\gamma}{\gamma} - \frac{\partial \omega_1}{\partial \gamma_1} = 0, \quad (25)$$

$$M(\gamma, k_1, k_2, \gamma_i^*) = \sum_{j=1}^2 v_j k_j [c_{11} F_{11}(\gamma_i^*) + 2c_{44} F_{44}(\gamma_i^*) + c_{12} F_{12}(\gamma_i^*) + c_{111} F_{111}(\gamma_i^*) + c_{112} F_{112}(\gamma_i^*) - c_{166} F_{166}(\gamma_i^*)] + \gamma \left( \sum_{j=1}^2 \mu_j \right) [c_{11} Q_{11}(\gamma_i^*) + 2c_{44} Q_{44}(\gamma_i^*) + c_{12} Q_{12}(\gamma_i^*) - c_{111} Q_{111}(\gamma_i^*) - c_{112} Q_{112}(\gamma_i^*) + c_{166} Q_{166}(\gamma_i^*)], \quad (26)$$

$$v_1 = 1, \quad v_2 = \beta, \quad \mu_1 = -(\gamma/k_1), \quad \mu_2 = (k_2/\gamma)\beta, \quad (27)$$

$$\beta = -\frac{\sin(k_1 d)}{\sin(k_2 d)} \cdot \frac{2\gamma^2}{(\gamma^2 - k_2^2)}, \quad (28)$$

$k_{1,2}$  визначаються форм.(4), (5) при  $q = 0$ , вирази для  $B_\gamma$ ,  $B_{\gamma_i^*}^{(1)}$  і коефіцієнтів  $F, Q$  при пружних сталих в (26) наведено у Додатку.

Підставляючи в  $\bar{N}_1$  його значення за формулою Планка, отримаємо

$$\left[ -\left( \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial \omega_1} \right)_{\gamma_i^*} \right] = \frac{\hbar}{\Theta} \exp(\hbar \omega_{\gamma_i^*} / \Theta) \left[ \exp(\hbar \omega_{\gamma_i^*} / \Theta) - 1 \right]^{-2}, \quad \Theta = k_B T, \quad (29)$$

$k_B$  – стала Больцмана,  $T$  – абсолютна температура. При  $(\hbar \omega_{\gamma_i^*} / \Theta) \ll 1$

$$\alpha_{ph}^{(a)} \propto \Theta, \quad (30)$$

що співпадає з об'ємним ізотропним випадком механізму Ландау-Румера [5] при врахуванні ефектів дисперсії при температурах вище температури Дебая. У низькотемпературній області, коли  $(\hbar \omega_{\gamma_i^*} / \Theta) \gg 1$ ,

$$\alpha_{ph}^{(a)} \propto \Theta^{-1} \exp(-\hbar \omega_{\gamma_i^*} / \Theta), \quad (31)$$

тобто поглинання різко зменшується за експоненціальним законом, в той час як в об'ємному випадку [5]  $\alpha_{ph}^{(a)} \propto \Theta^4$ . При певних розмірах дроту і достатньо великих значеннях  $\gamma$   $\alpha_{ph}^{(a)}$  може зростати з  $\gamma$  швидше, ніж за лінійним законом в [5].

## Двофононний розпад

У відповідності з урахуванням кубічного ангармонізму в операторі  $\hat{W}$  розглянемо поглинання квантів звуку найнижчої гібридної моди з частотою  $\omega_\gamma = c\gamma$  дисперсійної кривої 1 рис. 1a,b внаслідок розпаду на два гібридних фонони з частотами  $\omega_{\gamma_1} = c_1\gamma_1$  і  $\omega_{\gamma_2} = c_2\gamma_2$  тієї ж дисперсійної кривої. Тоді в (21)  $\hat{\zeta}_{ij}^{(1)}$  і  $\hat{\zeta}_{ij}^{(2)}$  відносяться до фононів тієї ж моди 1. Поглинання звуку визначається різницею імовірностей переходів  $|N, N_1, N_2\rangle \rightarrow |N-1, N_1+1, N_2+1\rangle$  і  $|N, N_1, N_2\rangle \rightarrow |N+1, N_1-1, N_2-1\rangle$  у першому порядку нестационарної теорії збурень, де  $N$  і  $N_1, N_2$  – числа заповнення квантів звуку з частотою  $\omega_\gamma$  і фононів з частотами  $\omega_{\gamma_1}, \omega_{\gamma_2}$ . В рамках прийнятої моделі для дроту процес розпаду має колінеарний характер, тобто можуть народжуватись фонони з паралельними або антипаралельними квазіхвильовими векторами. Згідно законам збереження

$$\gamma = \gamma_1 \pm \gamma_2, \quad \omega_\gamma = \omega_{\gamma_1} + \omega_{\gamma_2}. \quad (32)$$

При обчисленні матричних елементів переходу для достатньо малих ширин дроту обмежимося наближенням

$$\gamma d \ll 1, \quad \gamma_{1,2} d \ll 1. \quad (33)$$

На першій зліва практично лінійній ділянці закону дисперсії (див. рис. 1 a, b)  $c_1 \approx c_2 \approx c$ . При цьому  $\delta$ -функцію, яка виражає закон збереження енергії, слід замінити на лорентцівську функцію, враховуючи загасання фононів [1,8]

$$\tau^{-1} = \tau_{\gamma_1}^{-1} + \tau_{\gamma_2}^{-1}. \quad (34)$$

Часи життя  $\tau_{\gamma_i}$  короткохвильових гібридних фононів у дроті, зумовлені всілякими процесами зіткнень, залишаються невідомими. Маючи на увазі далі лише орієнтовну оцінку розпадного механізму, будемо вважати  $\tau = \text{const}$ , як це приймалось для часів життя теплових фононів, напр., в [3]. При  $\omega_\gamma \tau \gg 1$ , як свідчить розрахунок, можна знехтувати внеском розпаду на антипаралельні фонони.

Наведемо остаточний результат для коефіцієнта поглинання  $\alpha_{\text{ph}}^{(d)}$ , зумовленого колінеарним розпадом на два фонони:

$$\alpha_{\text{ph}}^{(d)} = \frac{\hbar}{6\pi\rho^3 ad} \frac{|D|^2}{|B|^3} \frac{\omega_\gamma^4 \tau}{c^8} \left\{ 1 + 2\pi^2 \left( \frac{\Theta}{\hbar\omega_\gamma} \right)^2 - 24\zeta(3) \left( \frac{\Theta}{\hbar\omega_\gamma} \right)^3 + 12 \left( \frac{\Theta}{\hbar\omega_\gamma} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( 1 + \frac{2\Theta}{n\hbar\omega_\gamma} \right) \exp\left(-\frac{n\hbar\omega_\gamma}{\Theta}\right) \right\} \cdot 8,686 \text{ дБ/см}, \quad (35)$$

де  $\zeta(3) \approx 1,202$  – значення дзета-функції Рімана [21], вирази для  $D$  і  $B$  через пружні сталі і швидкості звуку наведені у Додатку. У граничному випадку низьких температур  $(\Theta/\hbar\omega_\gamma) \ll 1$

$$\alpha_{\text{ph}}^{(d)} \approx \frac{\hbar}{6\pi\rho^3 ad} \frac{|D|^2}{|B|^3} \frac{\omega_\gamma^4 \tau}{c^8} \cdot 8,686 \text{ дБ/см}, \quad (36)$$

тобто у дроті  $\alpha_{\text{ph}}^{(d)} \propto \omega_\gamma^4$  на відміну від закону  $\omega_\gamma^5$  в об'ємному випадку [6]. При  $(\Theta/\hbar\omega_\gamma) > 1$  зручно використовувати еквівалентний (35) вираз

$$\alpha_{\text{ph}}^{(d)} \approx \frac{\hbar}{\pi\rho^3 ad} \frac{|D|^2}{|B|^3} \frac{\omega_\gamma^4 \tau}{c^8} \left\{ \frac{\Theta}{\hbar\omega_\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n+2)!} \left( \frac{\hbar\omega_\gamma}{\Theta} \right)^{2n-1} \right\} \cdot 8,686 \text{ дБ/см}, \quad (37)$$

де  $B_{2n}$  – числа Бернуллі [21]. Тоді при достатньо високих температурах  $(\Theta/\hbar\omega_\gamma) \gg 1$

$$\alpha_{\text{ph}}^{(d)} \approx \frac{1}{\pi\rho^3 ad} \frac{|D|^2}{|B|^3} \frac{\omega_\gamma^3 \Theta \tau}{c^8} \cdot 8,686 \text{ дБ/см}, \quad (38)$$

і степінь частотної залежності знижується до  $n=3$ ,  $\alpha_{\text{ph}}^{(d)} \propto \Theta$ , сума степенів частотної і температурної залежності в (36) і (38) дорівнює 4.

Наведені у даному розділі і Додатку формули можуть бути використані для оцінки фононного

поглинання у дроті з матеріалу кубічної симетрії для різних поперечних розмірів при  $(d/a) \geq 2$ .

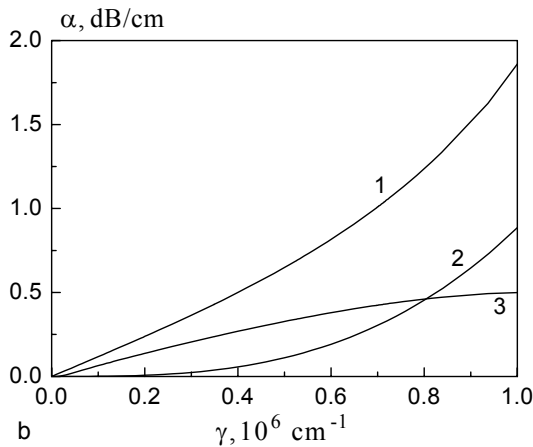
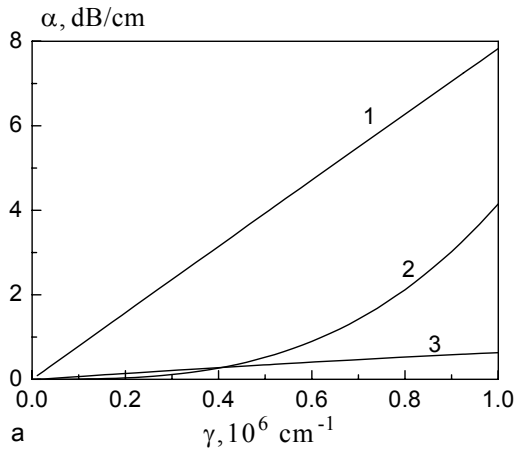
## III. Чисельні результати для фононного поглинання гіперзвуку в прямокутному квантовому дроті GaAs

Розглянемо поглинання гіперзвуку в

прямокутному квантовому дроті GaAs з поперечними розмірами  $2a \times 2d = 28,3\text{Å} \times 56,6\text{Å}$  (а) і  $50\text{Å} \times 150\text{Å}$  (б). Апроксимуємо дисперсійні криві 2 рис. 1 а, б теплових хвиль поліномом

$$\hbar\omega_1 = \sum_{m=0}^5 a_m \gamma_1^m \quad (39)$$

З коефіцієнтами  $a_m$ , залежними від поперечних розмірів дроту. Використовуючи (24)-(29), (D1)-(D12), (39), за допомогою чисельних методів знайдемо коефіцієнт фононного поглинання гіперзвуку  $\alpha_{ph}^{(a)}(\gamma)$  найнижчої дисперсійної кривої 1 (рис. 1a,b) за механізмом Ландау-Румера у прямокутному квантовому дроті GaAs при



**Рис. 2.** Коефіцієнт фононного поглинання гіперзвуку найнижчої моди 1  $\alpha_{ph}^{(a)}(\gamma)$  (крива 1),  $\alpha_{ph}^{(d)}(\gamma)$  (крива 2,  $\tau = 2 \cdot 10^{-10}$  с) і електронного поглинання  $\alpha_{el}(\gamma)$  (крива 3) у невиродженому квантовому дроті GaAs при  $T_z = 300$  К: а)  $28,3\text{Å} \times 56,6 \text{Å}$ , б)  $50\text{Å} \times 150\text{Å}$ .

температурі  $T = 300$  К і значеннях пружних сталей другого і третього порядків [20]:  $c_{11} = 11,81 \cdot 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>,  $c_{44} = 5,94 \cdot 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>,

$c_{12} = 5,32 \cdot 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>,  $c_{111} = -6,22 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup>,  $c_{112} = -3,87 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup>,  $c_{166} = -2,69 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup>.

На рис. 2a,b представлені залежності  $\alpha_{ph}^{(a)}(\gamma)$ . Величина  $\alpha_{ph}^{(a)}$  і відхилення від лінійної залежності  $\alpha_{ph}^{(a)}$  від  $\gamma$  при збільшенні хвильового вектора суттєво визначаються квантово-розмірними ефектами.

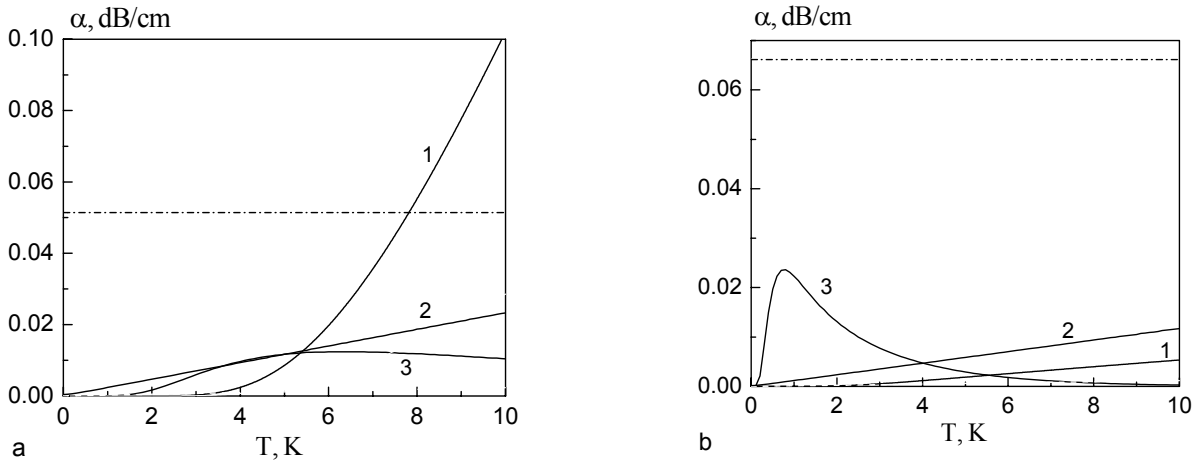
На рис. 2a,b представлені залежності за форм.(35) (або рівнозначно (37)), (D13)-(D18) коефіцієнта поглинання  $\alpha_{ph}^{(d)}(\gamma)$  тієї ж моди гіперзвуку для розпадного механізму при  $\tau = 2 \cdot 10^{-10}$  с,  $T = 300$  К (криві 2). Для порівняння з фононним механізмом поглинання на рис. 2a,b показані також розраховані згідно [14] залежності (криві 3) коефіцієнта електронного поглинання  $\alpha_{el}(\gamma)$  гіперзвуку вздовж осі дроту в невиродженому n-GaAs при тій же температурі  $T = 300$  К і концентрації електронів  $n = 10^{14}$  см<sup>-3</sup>. Таким чином, при кімнатних температурах у невиродженому дроті GaAs важливу роль відіграє фононне поглинання гіперзвуку.

На рис. 3a,b наведено температурні залежності фононного (криві 1,2) і електронного [14] поглинання (криві 3) для виродженого випадку дроту GaAs тих же самих розмірів при низьких температурах і  $n = 1,7 \cdot 10^{18}$  см<sup>-3</sup>,  $\gamma = 0,27 \cdot 10^6$  см<sup>-1</sup>,  $\tau = 2 \cdot 10^{-9}$  с (рис. 3a) і  $n = 1,5 \cdot 10^{17}$  см<sup>-3</sup>,  $\gamma = 0,21 \cdot 10^6$  см<sup>-1</sup>,  $\tau = 10^{-8}$  с (рис. 3b). При визначенні фононного поглинання враховано також залежність від температури пружних сталей другого порядку [20]. З рис. 3 а, б випливає, що при  $\Theta \ll \hbar\omega_\gamma$   $\alpha_{ph}^{(d)} > \alpha_{ph}^{(a)}$ , тобто домінує розпадный механізм; при  $T \rightarrow 0$   $\alpha_{ph}^{(a)} \rightarrow 0$ , в той час як  $\alpha_{ph}^{(d)} \neq 0$ . Для виродженого електронного газу при низьких температурах поглинання гіперзвуку конкурує з фононним розпадним механізмом. На рис. 3a,b штрих-пунктирні лінії відповідають повільним температурним залежностям [1,15] електронного поглинання об'ємних (необмежених) поздовжніх акустичних фононів гіперзвуку  $\alpha_{el}^{(v)}(T)$  в масивних кристалах GaAs. Крім того, у розглянутих умовах  $\alpha_{ph}^{(a)}, \alpha_{el} \ll \alpha_{el}^{(v)}$ . При  $T \rightarrow 0$   $\alpha_{el} \rightarrow 0$ , тоді як  $\alpha_{el}^{(v)} \neq 0$ .

## Висновки

1. Поглинання гіперзвуку за механізмами Ландау-Румера і двофононного розпаду в прямокутному квантовому дроті суттєво визначається квантово-розмірними ефектами, що обумовлено характерними особливостями гібридних обмежених акустичних фононів.

2. Отримані спектральні і температурні залежності фононного поглинання гіперзвуку



**Рис. 3.** Температурні залежності фононного поглинання гіперзвуку найнижчої моди 1  $\alpha_{ph}^{(a)}(T)$  (крива 1),  $\alpha_{ph}^{(d)}(T)$  (крива 2а,  $\tau = 2 \cdot 10^{-9}$  с; крива 2б,  $\tau = 10^{-8}$  с) і електронного поглинання  $\alpha_{el}(T)$  (крива 3) для виродженого квантового дроту GaAs: а)  $28,3\text{Å} \times 56,6\text{Å}$ , б)  $50\text{Å} \times 150\text{Å}$ . Штрих-пунктирні лінії –  $\alpha_{el}^{(v)}(T)$ .

найнижчої моди в прямокутному квантовому дроті свідчать про зменшення поглинання у низькотемпературній області і переважанні механізму двофононного розпаду при  $\Theta \ll \hbar\omega_\gamma$ .

3. При достатньо високих температурах домінує фононний механізм поглинання у прямокутному квантовому дроті GaAs, а при низьких температурах слід враховувати для виродженого квантового дроту

електронне поглинання і двофононний розпад.

**М.А. Рувінський** – д.ф.-м.н., професор кафедри фізики і хімії твердого тіла.  
**Б.М. Рувінський** – к.ф.-м.н., доцент кафедри фізики новітніх технологій.

### Додаток

$$B_\gamma = \frac{2}{d} \left\{ f_2(k_1, d) + 2\beta g_1(k_1, k_2, d) + \beta^2 f_2(k_2, d) + \frac{\gamma^2}{k_1^2} f_1(k_1, d) - \right. \\ \left. - \frac{2k_2}{k_1} \beta g_2(k_1, k_2, d) + \frac{k_2^2}{\gamma^2} \beta^2 f_1(k_2, d) \right\}, \quad (D1)$$

$$f_i(k_j, d) = d \left[ 1 - (-1)^i \cdot \frac{\sin(2k_j d)}{2k_j d} \right], \quad i, j = 1, 2; \quad (D2)$$

$$g_i(k_1, k_2, d) = \frac{\sin(k_1 - k_2)d}{k_1 - k_2} + (-1)^i \cdot \frac{\sin(k_1 + k_2)d}{k_1 + k_2}; \quad (D3)$$

$B_{\gamma_1}^{(1)}$  відрізняється від  $B_\gamma$  заміною  $\gamma \rightarrow \gamma_1$  и  $c \rightarrow c_1$ .

$$F_{11} = q_{nl} (3\tilde{v}_{nl} f_{nl}^{(+)} - \tilde{\mu}_{nl} f_{nl}^{(-)}), \quad F_{44} = [(\gamma_i^*)^2 \tilde{v}_{nl} + \gamma_i^* \rho_{nl} q_{nl}] f_{nl}^{(-)}, \quad (D4)$$

$$F_{12} = (\gamma_i^*)^2 (\tilde{v}_{nl} f_{nl}^{(-)} + \tilde{\mu}_{nl} f_{nl}^{(+)}) - 2\gamma_i^* \rho_{nl} q_{nl} f_{nl}^{(+)}, \quad (D5)$$

$$F_{111} = q_{nl} \left( \tilde{v}_{nl} f_{nl}^{(+)} - \frac{1}{3} \tilde{\mu}_{nl} f_{nl}^{(-)} \right), \quad F_{112} = [(\gamma_i^*)^2 \tilde{\mu}_{nl} - 2\gamma_i^* \rho_{nl} q_{nl}] f_{nl}^{(+)}, \quad (D6)$$

$$F_{166} = [(\gamma_i^*)^2 \tilde{v}_{nl} + \tilde{\mu}_{nl} q_{nl} - 2\rho_{nl} q_{nl}] f_{nl}^{(-)}, \quad (D7)$$

$$Q_{11} = (\gamma_i^*)^2 (\tilde{v}_{nl} f_{nl}^{(-)} - 3\tilde{\mu}_{nl} f_{nl}^{(+)}), \quad Q_{44} = (\tilde{\mu}_{nl} q_{nl} - \gamma_i^* \rho_{nl} q_{nl}) f_{nl}^{(-)}, \quad (D8)$$

$$Q_{12} = [2\gamma_i^* \rho_{nl} q_{nl} - q_{nl} (\tilde{v}_{nl} - \tilde{\mu}_{nl})] f_{nl}^{(+)}, \quad (D9)$$

$$Q_{111} = (\gamma_i^*)^2 \left( \tilde{\mu}_{nl} f_{nl}^{(+)} - \frac{1}{3} \tilde{v}_{nl} f_{nl}^{(-)} \right), \quad Q_{112} = (\tilde{v}_{nl} q_{nl} - 2\gamma_i^* \rho_{nl} q_{nl}) f_{nl}^{(+)}, \quad (D10)$$

$$Q_{166} = [(\gamma_i^*)^2 \tilde{v}_{nl} + q_{nl} \tilde{\mu}_{nl} - 2\gamma_i^* \rho_{nl} q_{nl}] f_{nl}^{(-)}, \quad (D11)$$

де

$$q_{nl} = q_n q_l, \quad \tilde{v}_{nl} = \tilde{v}_n \tilde{v}_l, \quad \tilde{\mu}_{nl} = \tilde{\mu}_n \tilde{\mu}_l, \quad \rho_{nl} = \tilde{v}_n \tilde{\mu}_l \quad (n, l = 1, 2), \quad (D12)$$

$$f_{nl}^{(-)} = d^{-1} g_1(q_n, q_l, d), \quad f_{nl}^{(+)} = d^{-1} g_2(q_n, q_l, d);$$

величини  $q_n$ ,  $\tilde{v}_n$ ,  $\tilde{\mu}_n$  відрізняються від  $k_n$ ,  $v_n$  і  $\mu_n$  ( $n = 1, 2$ ) заміною  $\gamma \rightarrow \gamma_1$ ,  $c \rightarrow c_1$  і визначаються для моди 2 (рис.1 а, б) в точках  $\gamma_i^*$  ( $\gamma$ ,  $k_{1,2} \ll \gamma_i^*$ ,  $q_i$ ). У форм. (D4)-(D12) за індексами  $n$ ,  $l$ , що повторюються, відбувається підсумовування.

$$D = (3c_{11} + c_{111})D_1 + c_{12}(D_2 + D_3) + c_{112}D_3, \quad (D13)$$

$$D_1 = v_j \eta_j v_{nl} \eta_{nl} - \mu \tilde{\mu}, \quad D_2 = v_j \eta_j \tilde{\mu} - \mu v_{nl} \eta_{nl} + (\mu - v_j \mu_j) \tilde{\rho}, \quad D_3 = \mu \mu_{nl} \eta_{nl}, \quad (D14)$$

$j, n, l = 1, 2$ .

В (D14) мається на увазі підсумовування за індексами  $j, n, l$ , що повторюються:

$$v_{nl} = v_n v_l, \quad \mu_{nl} = \mu_n \mu_l, \quad \eta_{nl} = \eta_n \eta_l, \quad (D15)$$

$$\mu = \sum_j \mu_j, \quad \tilde{\mu} = \sum_{n,l} \mu_{n,l}, \quad \tilde{\rho} = 2 \sum_{n,l} v_n \mu_l \eta_n, \quad (D16)$$

$$v_1 = 1, \quad v_2 = -2\eta_1 \eta_2^{-1} (1 - \eta_2^2)^{-1}, \quad \mu_1 = -\eta_1^{-1}, \quad \mu_2 = -2\eta_1 (1 - \eta_2^2)^{-1}. \quad (D17)$$

$$B = 4[\eta_1^{-2} + 4(1 + \eta_1^2 - \eta_2^2)(1 - \eta_2^2)^{-2}]. \quad (D18)$$

- [1] В.Л. Гуревич. *Кинетика фононных систем*. Наука, М. 400 с. (1980). Теория акустических свойств полупроводников (обзор) // *ФТП* **2**(11), 1567-1592 (1968).
- [2] Дж. Такер, В. Рэмpton. *Гиперзвук в физике твердого тела*. Мир, М. 455 с. (1975).
- [3] Р. Труэлл, Ч. Эльбаум, Б. Чик. *Ультразвуковые методы в физике твердого тела*. Мир, М. 307 с. (1972).
- [4] M.N. Wybourne, J.K. Wigmore. Phonon Spectroscopy // *Rep.Prog.Phys.*, **51**, pp. 923-987 (1988).
- [5] L. Landau, G. Rumer. Über Schallabsorption in festen Körpern // *Phys.Zs.Sowjet.*, **11**, pp. 18-24 (1937).
- [6] Г.Л. Слонимский. К вопросу об абсорбции звука в твердых телах // *ЖЭТФ*, **7**, сс. 1457-1462 (1937).
- [7] L.H. Taylor and F.R. Rollins, Jr. Ultrasonic Study of Three-Phonon Interactions. I. Theory // *Phys.Rev.*, **136**, pp. A591-A596 (1964).
- [8] A. Berke, A.P. Mayer, R.K. Wehner. Spontaneous decay of long-wavelength acoustic phonons // *J.Phys.C: Solid State Phys.*, **21**, pp. 2305-2323 (1988).
- [9] И.Г. Кулеев, И.И. Кулеев. Механизмы релаксации продольных фононов в кубических кристаллах германия, кремния и алмаза // *ФТТ*, **47**(2), сс.300-310 (2005).
- [10] R. Baumgartner, M. Engelhardt, K.F. Renk. Spontaneous Decay of High-Frequency Acoustic Phonons in CaF<sub>2</sub> // *Phys.Rev.Lett.*, **47**(19), pp. 1403-1407 (1981).
- [11] А.В. Акимов, А.А. Каплянський, А.Д. Сыркин. Фононное узкое горло в люминесценции кристаллов CaF<sub>2</sub>-Eu<sup>2+</sup> и ангармоническое время жизни терагерцовых акустических фононов // *Письма в ЖЭТФ*, **33**(8), сс. 410-414 (1981).
- [12] Й. Имри. *Введение в мезоскопическую физику*. Физматлит, М. 304с. (2002).
- [13] T. Hesjedal. Nanoacoustic-probing acoustic waves on nanoscale // *Proc. of SPIE*, **5045**, pp. 11-25 (2003).
- [14] М.А. Рувінський, Б.К. Остафійчук, Б.М. Рувінський. Електронне поглинання обмежених фононів гіперзвуку в прямокутному квантовому дроті // *Металлофиз. новейших технолог.*, **27**(8), сс. 1075-1085 (2005).
- [15] Ч. Киттель. *Квантовая теория твердых тел*. Наука, М. 492 с. (1967).
- [16] M. Redwood. *Mechanical Waveguides*. Pergamon, Oxford (1960).
- [17] SeGi Yu, K.W. Kim, M.A. Stroschio, G.F. Iafrate, A. Ballato. Electron-acoustic-phonon scattering rates in rectangular wires // *Phys.Rev.B.*, **50**(3), pp. 1733-1738 (1994).
- [18] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теория упругости*. Наука, М. 248 с. (1987).
- [19] H. Bruus, K. Flensberg, H. Smith. Magnetoconductivity of quantum wires with elastic and inelastic scattering // *Phys. Rev. B.*, **48**(15), pp. 11144-11155 (1993).
- [20] А.А. Блистанов, В.С. Бондаренко, Н.В. Переломова, Ф.Н. Стрижевская, В.В. Чкалова, М.П. Шаскольская. *Акустические кристаллы. Справочник*. Наука, М. 632 с. (1982).



- [21] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. ГИФМЛ, М. 1100 с. (1962).

M.A. Ruvinskii<sup>1</sup>, B.M. Ruvinskii<sup>2</sup>

## **Landau-Rumer Process and Two-phonon Decay of Hypersonic Quanta in Rectangular Quantum Wire**

<sup>1</sup>*Vasyl Stefanyk' Precarpathian National University,  
57 Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk, 76000, Ukraine*

<sup>2</sup>*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas,  
15, Carpatska Str., Ivano-Frankivsk, 76000, Ukraine,  
[bruvinsky@gmail.com](mailto:bruvinsky@gmail.com)*

For the case of rectangular quantum wire the mechanisms of Landau-Rumer process and two-phonon decay of sound quanta have been considered. The attenuation coefficients for the confined acoustic phonons of the lowest hybrid width mode of hypersound in a free-standing GaAs wire with different cross-sectional dimensions have been calculated. The comparison of the phonon and electron mechanisms of hypersonic attenuation into rectangular wire and infinite solid is carried out. In a limiting case of low temperatures the accounting of cubic anharmonism in wire leads to the exponential temperature dependence of hypersonic attenuation for Landau-Rumer process and dominant attenuation by the decay process with degree reduction of its frequent dependence. At sufficiently high temperatures the phonon mechanism of hypersonic attenuation exceeds the electron mechanism in a nondegenerate quantum wire.