ФІЗИКА І ХІМІЯ ТВЕРДОГО ТІЛА
Т. 9, № 3, 2008, С. 448-453

PHYSICS AND CHEMISTRY OF SOLID STATE
V. 9, № 3, 2008, P. 448-453

PACS numbers: 03.65.-w; 03.65. Pm

ISSN 1729-4428

М.А. Рувінський

Рівняння Шредінгера і фундаментальний квант дії $\hbar/2$

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул.Шевченка, 57, м.Івано-Франківськ, 76000, Україна,
bruvinsky@gmail.com

На основі уявлення про існування фундаментального кванта дії $\hbar/2$ і наявності у частинки (або системи частинок) стохастичного числа квантів дії з неоднорідним розподілом Пуассона, після усереднення і введення постулату про пропорційність імовірності нульового значення числа квантів дії густині імовірності положення частинки, можна прийти до рівняння Шредінгера і співвідношення невизначеності Гейзенберга. З нової точки зору розглянуто принцип тотожності однакових мікрочастинок і сформульовано варіаційний принцип квантової механіки.

Ключові слова: фундаментальний квант дії $\hbar/2$, стохастичне поле, неоднорідний розподіл Пуассона, рівняння Шредінгера, співвідношення невизначеності, принцип тотожності, варіаційний принцип.

Стаття поступила до редакції 12.02.2008; прийнята до друку 15.06.2008.

Вступ

Імовірнісна інтерпретація нерелятивістської квантової механіки, вперше запропонована Борном, практично не викликає сумнівів, хоча і не доведено, що вона є єдино можливою. Останнє можна з‘ясувати лише з подальшим виходом за межі сучасної квантової теорії, якого на даний час ще не існує. Але і в межах сучасної квантової фізики постійно робляться спроби якось по-новому осмислити відмінність між фізичним змістом класичної і квантової теорій [1-11]. Все більшого поширення набуває фейнманівське формулювання [6] квантової механіки, яке ґрунтується на постулаті Дірака про квазікласичний зв‘язок [10] пропагатора з функцією дії S частинки і введенні поняття безмежнократних функціональних інтегралів за траєкторіями. Слід мати на увазі [5,9], що ці "траєкторії", строго кажучи, не можна вважати траєкторіями руху частинки в класичному розумінні, оскільки вони можуть не мати неперервних дотичних (похідних) в жодній точці. У зв‘язку з підходом Фейнмана в [12] влучно зауважено, що "... дія S, якою прекрасною вона б не була, відігравала лише дуже незначну роль в класичній механіці, оскільки там потрібно було лише знати положення її екстремумів. У квантовій же механіці дія використовується у всіх точках. Звертаючись до минулого, як не замислитись над тим, чи задавали собі фізики минулого століття питання, чому так мало береться від поняття дії!"

В основу наступного розгляду ми покладаємо факт існування фундаментального кванта дії, що вже явно використовувалось ще на зорі розвитку старої квантової теорії Зоммерфельдом (з напівкласичних позицій [1], і у дослідженнях Румера [7] з 5-вимірної теорії поля (де квантування було проявом гіпотетичної періодичної залежності фізичних величин від п‘ятої координати – дії). Деякі попередні ідеї і результати на ранній, початковій, стадії нашого розгляду викладено в [13].

В даній роботі при формулюванні квантової механіки використовується метод Ланжевена [14,15], при якому досліджуються певні стохастичні диференціальні рівняння для функцій дії.

I. Кванти дії, неоднорідний розподіл Пуассона і хвильове рівняння Шредінгера

Фундаментальним квантом дії вважаємо [13] величину $\hbar/2$, що збігається також з висновком нещодавньої роботи Суханова [16] з квантового узагальнення рівноважної статистичної термодинаміки. У відповідності з методом Ланжевена [14,15] функцію дії S мікрочастинки представляємо у вигляді суми двох функцій:

$$S = S_C + S', \qquad (1)$$

де $S'(\vec{r},t)$ – стохастична дія, а $S_C(\vec{r},t)$ – дія, що має звичайний класичний аналог при $\hbar \to 0$. Зауважимо, що у фейнманівському формулюванні квантової механіки [6,9] виділення доданку функціонала дії за класичною траєкторією розглядається як зручний методичний прийом для обчислення функціональних інтегралів. Стохастичну дію $S'(\vec{r},t)$, в якій виявляється існування скінченного кванта дії $\hbar/2$, визначимо так:

$$S'(\vec{r},t) = -\frac{\hbar}{2}N(\vec{r},t)\,, \tag{2}$$

де $N(\vec{r},t)$ приймає випадкові цілочисельні і невід‘ємні значення, що дорівнюють числу квантів стохастичної дії мікрочастинки при її русі у зовнішньому полі $V(\vec{r},t)$. Згідно (1), швидкість частинки з масою m дорівнює

$$\frac{\nabla S}{m} = \frac{\nabla S_C}{m} + \frac{\nabla S'}{m}\,. \tag{3}$$

Нехай джерелом поля швидкостей $\nabla S_C/m$ і $\nabla S'/m$ частинки є частота зміни у неї числа квантів дії N:

$$\operatorname{div}\frac{\nabla S_C}{m} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_C, \tag{4}$$

$$\operatorname{div}\frac{\nabla S'}{m} = \frac{\delta N}{\delta t}, \tag{5}$$

де

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_C \equiv \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial \vec{r}}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_C, \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_C \equiv \frac{\nabla S_C}{m}\,; \tag{6}$$

$$\frac{\delta N}{\delta t} \equiv \left(\frac{dS_C}{dt} - L\right)/(\hbar/2)\,, \tag{7}$$

$$\frac{dS_C}{dt} \equiv \frac{\partial S_C}{\partial t} + \frac{\partial S_C}{\partial \vec{r}}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \frac{\nabla S}{m}\,; \tag{8}$$

$$L = \frac{(\nabla S)^2}{2m} - V \tag{9}$$

– функція Лагранжа.

З рівнянь (4) і (5) випливає, що вихід частинки з даної точки простору (або її прибуття) пов‘язано із зростанням (або зменшенням) у неї числа квантів дії, і рух мікрочастинки в значній мірі обумовлений стохастичною дією S'. Диференційовність випадкових функцій в (3)-(9) має певний математичний зміст з точки зору ймовірнісної збіжності [15]. Якщо ж похідної в імовірнісному понятті не існує, то відповідні "диференціальні рівняння" мають лише деякий символічний зміст. Тоді в ланжевенівському підході цікавляться змістом кінцевого розв‘язку або розв‘язком усереднених рівнянь (подібно до того як визначають функціональний інтеграл при відсутності похідних до фейнманівських "траєкторій" в кожній точці).

Після підстановки (1)-(3), (6)-(9) в (5) і (4) і усереднення за випадковим числом квантів дії N, враховуючи просторово-часову неоднорідність у зовнішньому полі $V(\vec{r},t)$, отримаємо систему рівнянь для усереднених функцій дій $\bar{S}_C(\vec{r},t)$ і $\bar{S}'(\vec{r},t) = -\frac{\hbar}{2}\bar{N}(\vec{r},t)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \bar{S}_C}{\partial t} + \frac{(\nabla\bar{S}_C)^2}{2m} - \frac{\hbar}{2}\operatorname{div}\frac{\nabla\bar{S}'}{m} - \frac{(\nabla\bar{S}')^2}{2m} + \\ +\bar{V} + \frac{\overline{(\nabla\sigma_C)^2}}{2m} - \frac{\overline{(\nabla\sigma')^2}}{2m} = 0\end{gathered}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \bar{S}'}{\partial t} + \frac{1}{m}\nabla\bar{S}_C\nabla\bar{S}' + \frac{\hbar}{2}\operatorname{div}\frac{\nabla\bar{S}_C}{m} + \frac{1}{m}\overline{\nabla\sigma_C\nabla\sigma'} = 0\,, \tag{11}$$

де $\sigma_C = S_C - \bar{S}_C$, $\sigma' = S' - \bar{S}'$, (12)

($\bar{V} = V$). Дисперсія "класичної" швидкості $\nabla S_C/m$ повністю обумовлена дисперсією стохастичної швидкості $\nabla S'/m$, а їх випадкові значення статистично незалежні (за означенням (1)), тобто

$$\overline{(\nabla\sigma_C)^2} = \overline{(\nabla\sigma')^2}\,, \tag{13}$$

$$\overline{\nabla\sigma_C\nabla\sigma'} = 0\,. \tag{13'}$$

Тоді з (10) і (11) маємо замкнену систему рівнянь:

$$\frac{\partial \bar{S}_C}{\partial t} + \frac{(\nabla\bar{S}_C)^2}{2m} - \frac{\hbar}{2}\operatorname{div}\frac{\nabla\bar{S}'}{m} - \frac{(\nabla\bar{S}')^2}{2m} + V = 0\,, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \bar{S}'}{\partial t} + \frac{1}{m}\nabla\bar{S}_C\nabla\bar{S}' + \frac{\hbar}{2}\operatorname{div}\frac{\nabla\bar{S}_C}{m} = 0\,. \tag{15}$$

З розглянутої точки зору поняття просторової локалізації частинки в даний момент часу повинно бути пов‘язано з випадковою подією наявності у частинки нульового числа квантів дії $N = 0$. При $N \geq 1$ в даній точці простору виникає делокалізованість і виявляється невизначеність місцеположення частинки, що можна тлумачити, як появу "віртуального стану" частинки. Отже, вводимо постулат: густина імовірності $w(\vec{r},t)$ знаходження частинки у просторово-часовій точці $(\vec{r},t)$ пропорційна імовірності $P_0(\vec{r},t)$ нульового значення числа квантів дії у частинки в даній точці, тобто

$$w(\vec{r},t) = CP_0(\vec{r},t)\,, \tag{16}$$

де C – константа, яка визначається з умови нормування $w(\vec{r},t)$.

Якщо для випадкового числа N квантів дії частинки має місце неоднорідний розподіл Пуассона [15] (при русі частинки у зовнішньому полі $V(\vec{r},t)$), то імовірність

$$P_N(\vec{r},t) = \frac{(\bar{N})^N}{N!}e^{-\bar{N}}\,. \tag{17}$$

При $N = 0$

$$P_0(\vec{r},t) = e^{-\bar{N}(\vec{r},t)}\,. \tag{18}$$

При $N = 1$

$$\begin{gathered}P_1(\vec{r},t) = -P_0(\vec{r},t)\ln(P_0(\vec{r},t)) = \\ = -[w(\vec{r},t)/C]\ln[w(\vec{r},t)/C]\,.\end{gathered} \tag{19}$$

Згідно (17) і (16)

$$P_N(\vec{r},t) = \frac{(-1)^N}{N!}[w(\vec{r},t)/C]\{\ln[w(\vec{r},t)/C]\}^N\,. \tag{20}$$

Бачимо, що функція $P_1(\vec{r},t)$ (19) є "першим моментом" міри невизначеності місцеположення частинки в даній просторово-часовій точці $(\vec{r},t)$ (певний аналог поняття густини ентропії в статистичній фізиці [17]).

З (2), (18) і (16) матимемо

$$\overline{S}' = \frac{\hbar}{2}\ln[w(\vec{r},t)/C]. \tag{21}$$

Після підстановки (21) в (14) і (15) одержимо:

$$\frac{\partial \overline{S}_C}{\partial t} + \frac{(\nabla \overline{S}_C)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2\sqrt{w}}{\sqrt{w}} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\; w\frac{\nabla \overline{S}_C}{m} = 0. \tag{23}$$

Рівняння (22) і (23), як відомо [4], еквівалентні нерелятивістському рівнянню Шредінгера для хвильової функції частинки

$$\Psi = \sqrt{w}\exp(i\overline{S}_C/\hbar), \tag{24}$$

а рівняння (23) є звичайним квантовомеханічним рівнянням неперервності. В рівнянні (22) останній член

$$V_{кв}(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2\sqrt{w}}{\sqrt{w}} \tag{25}$$

часто формально трактують [1] як "квантовий потенціал" в узагальненому рівнянні Гамільтона-Якобі (на відміну від класичного потенціалу V). Зауважимо, що основне рівняння нерелятивістської квантової механіки виявилось пов‘язаним з неоднорідним розподілом Пуассона для квантів дії мікрочастинки.

Розглянуті міркування легко узагальнюються на випадок системи частинок. Замість (2)-(6), (8), (9) тепер будемо мати (формули (1), (7) зберігають свій вигляд):

$$S'(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t) = -\frac{\hbar}{2}N(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t), \tag{26}$$

$$\frac{\nabla_i S}{m_i} = \frac{\nabla_i S_C}{m_i} + \frac{\nabla_i S'}{m_i}, \tag{27}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{div}_i\frac{\nabla_i S_C}{m_i} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_C, \tag{28}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{div}_i\frac{\nabla_i S'}{m_i} = \frac{\delta N}{\delta t}, \tag{29}$$

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_C \equiv \frac{\partial N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial N}{\partial \vec{r}_i}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)_C, \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)_C \equiv \frac{\nabla_i S_C}{m_i}; \tag{30}$$

$$\frac{dS_C}{dt} \equiv \frac{\partial S_C}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S_C}{\partial \vec{r}_i}\frac{d\vec{r}_i}{dt}, \frac{d\vec{r}_i}{dt} \equiv \frac{\nabla_i S}{m_i}; \tag{31}$$

$$L = \sum_{i=1}^{n}\frac{(\nabla_i S)^2}{2m_i} - V(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t), \tag{32}$$

де S, S_C, S', N, L і V – вже відносяться до системи n частинок. Крім зовнішнього поля, $V(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)$ містить також і міжчастинкову взаємодію; $N(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)$ є випадковим числом квантів стохастичної дії $S'(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)$ (26) всієї системи; m_i – маса i-ої частинки. Певна дійсна конфігурація системи частинок пов‘язана лише з випадковим значенням $N=0$ (при $N\geq 1$ маємо "віртуальні конфігурації"). Подібно до одночастинкового випадку після відповідного усереднення (28), (29) при умовах

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{(\nabla_i\sigma_C)^2}}{2m_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{(\nabla_i\sigma')^2}}{2m_i}, \tag{33}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\overline{\nabla_i\sigma_C\nabla_i\sigma'} = 0 \tag{34}$$

(σ_C і σ' визначаються формулами (12)), узагальнення постулату (16) для всієї системи і підстановки

$$\overline{S}'(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t) = \frac{\hbar}{2}\ln[w(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)/A] \tag{35}$$

отримаємо рівняння

$$\frac{\partial \overline{S}_C}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{(\nabla_i\overline{S}_C)^2}{2m_i} + V - \sum_{i=1}^{n}\frac{\hbar^2}{2m_i}\frac{\nabla_i^2\sqrt{w}}{\sqrt{w}} = 0, \tag{36}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{div}_i\; w\frac{\nabla_i\overline{S}_C}{m_i} = 0, \tag{37}$$

де $w(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)$ – густина імовірності певної конфігурації системи (A – стала нормування w). З рівняння (36) випливає рівняння Шредінгера для хвильової функції системи частинок

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t) = [w(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)]^{1/2}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\overline{S_C}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)\right], \tag{38}$$

а (37) є узагальненням рівняння неперервності на випадок системи частинок [5,8]. Отже, рівняння Шредінгера системи частинок пов‘язано з пуассонівським характером стохастичної дії S' всієї системи. У розглянутій трактовці не виникають труднощі, властиві стандартним моделям квантових систем в абстрактному конфігураційному просторі.

II. Співвідношення невизначеності

Виявляється, що з рівності (13) дисперсій двох швидкостей частинки випливає співвідношення невизначеності Гейзенберга для координати та імпульсу. Оскільки густина імовірності знаходження частинки у просторово-часовій точці $(\vec{r},t)$ визначається, згідно (16), (18), середнім числом

$\overline{N}(\vec{r},t)$ квантів дії мікрочастинки у цій точці

$$w(\vec{r},t) = Ce^{-\overline{N}(\vec{r},t)}, \tag{39}$$

то ліва і права частини в (13) залежать від випадкових місцеположень частинки. Проведемо усереднення (13) за просторовим розподілом (39) у довільний фіксований момент часу t, яке позначимо кутовими дужками <...>:

$$\left\langle \overline{(\nabla\sigma_C)^2} \right\rangle = \left\langle \overline{(\nabla\sigma')^2} \right\rangle. \tag{40}$$

Для одновимірного руху вздовж осі x, враховуючи (12), (2) і (39) в (40), отримаємо

$$\left\langle \overline{(\Delta p_x)^2} \right\rangle = \frac{\hbar^2}{2} \left\langle \overline{\left(\frac{d\Delta N}{dx}\right)^2} \right\rangle, \tag{41}$$

де $\left\langle \overline{(\Delta p_x)^2} \right\rangle$ – дисперсія складової імпульсу p_x, $\Delta N \equiv N - \overline{N}$. Визначимо середнє квадратичне відхилення координати $\sqrt{\left\langle \overline{(\Delta x)^2} \right\rangle}$ за лінійною дисперсією [5, 9] числа квантів дії $\sqrt{2\left\langle \overline{(\Delta N)^2} \right\rangle}$, тобто

$$\sqrt{\left\langle \overline{(\Delta x)^2} \right\rangle} = \frac{\sqrt{2\left\langle \overline{(\Delta N)^2} \right\rangle}}{\sqrt{\left\langle \overline{\left(\frac{d\Delta N}{dx}\right)^2} \right\rangle}}. \tag{42}$$

Тоді, як легко бачити з (41) і (42), добуток невизначеностей імпульсу і координати дорівнює

$$\sqrt{\left\langle \overline{(\Delta p_x)^2} \right\rangle} \cdot \sqrt{\left\langle \overline{(\Delta x)^2} \right\rangle} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{2\left\langle \overline{(\Delta N)^2} \right\rangle}. \tag{43}$$

Згідно з розподілом Пуассона [14,15]

$$\overline{(\Delta N)^2} = \overline{N}, \tag{44}$$

$$\sqrt{\left\langle \overline{(\Delta p_x)^2} \right\rangle} \cdot \sqrt{\left\langle \overline{(\Delta x)^2} \right\rangle} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{2\left\langle \overline{N} \right\rangle}, \tag{45}$$

де

$$\left\langle \overline{N} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{N}(x,t) w(x,t) dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{N}(x,t) e^{-\overline{N}(x,t)} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\overline{N}(x,t)} dx}. \tag{46}$$

Оцінку (46) проведено, виходячи з того, що найбільш імовірне положення частинки відповідає мінімальному середньому числу квантів дії $\overline{N}(x_0,t)$ у частинки в даній точці:

$$\overline{N}(x,t) \approx \overline{N}(x_0,t) + \frac{(x-x_0)^2}{2} \left.\frac{d^2\overline{N}(x,t)}{dx^2}\right|_{x=x_0}, \tag{47}$$

$$\overline{N}(x_0,t) \geq 0, \quad \left.\frac{d^2\overline{N}(x,t)}{dx^2}\right|_{x=x_0} > 0, \tag{48}$$

і домінуючий внесок в (46) пов‘язаний з околом точки x_0. Тоді

$$\left\langle \overline{N}(x,t) \right\rangle = \overline{N}(x_0,t) + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}. \tag{49}$$

З (45) і (49) маємо відоме співвідношення невизначеності Гейзенберга

$$\sqrt{\left\langle \overline{(\Delta p_x)^2} \right\rangle} \cdot \sqrt{\left\langle \overline{(\Delta x)^2} \right\rangle} \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{50}$$

яке свідчить про відсутність поняття траєкторії мікрочастинки. В розглянутому підході до квантової механіки рівняння Шредінгера і співвідношення невизначеності Гейзенберга "генетично" пов‘язані.

III. Принцип тотожності однакових частинок

У системі багатьох частинок густина імовірності певної конфігурації системи визначається середнім числом квантів стохастичної дії $\overline{N}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)$ всієї системи (див. (26), (35)):

$$w(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t) = A\exp[-\overline{N}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)]. \tag{51}$$

Хвильова функція системи частинок визначається формулою (38). Принцип тотожності однакових частинок набуває тепер такого змісту:

Середнє число квантів стохастичної дії $\overline{N}(x_1,x_2,...,x_n,t)$ системи однакових частинок не залежить від перестановки частинок, де x_i – сукупність просторових і спінових змінних i-ої частинки.

Оскільки $\overline{N}(x_1,x_2,...,x_n,t)$ визначає густину імовірності $w(x_1,x_2,...,x_n,t)$ певної конфігурації системи однакових частинок, то з переставної інваріантності $\overline{N}(x_1,x_2,...,x_n,t)$ випливає переставна інваріантність $w(x_1,x_2,...,x_n,t)$. На останньому ґрунтується доведення Жирардо (M.D.Girardeau, Phys.Rev. B **139**, 500 (1965); J.Math.Phys. **10**, 1302 (1969)) принципу симетрії для хвильових функцій системи тотожних частинок з висновком про одномірність незвідних представлень групи перестановок [18,19]. Звідси, як відомо [8-10], і випливає можливість реалізації в природі лише станів з симетричними і антисиметричними хвильовими функціями. Що стосується загального припущення про одномірність незвідних представлень групи перестановок, то в роботі [19] було показано, що опис стану однакових частинок багатомірними незвідними представленнями суперечить поняттю тотожності частинок.

Отже, уявлення про фундаментальні кванти дії узгоджуються з принципом тотожності однакових частинок.

IV. Варіаційний принцип

Рівняння (14) і (15) для $\overline{S}_C$ і $\overline{S}'$, які разом з постулатом про зв‘язок густини імовірності $w(\vec{r},t)$ з неоднорідним розподілом Пуассона $P_0(\vec{r},t)$ (згідно (16), (18), (21), (24)) приводять до рівняння Шредінгера, можна встановити також на основі варіаційного принципу, пов‘язаного із функціоналом, що являє собою середнє від різниці частот зміни числа $\bar{N} = -2\bar{S}'/\hbar$ квантів дії мікрочастинки:

$$I = \left\langle \frac{d\bar{N}}{dt} - \left(\frac{d\bar{N}}{dt}\right)_C - \frac{\delta\bar{N}}{\delta t} \right\rangle = \\ = C\int \left[\frac{d\bar{N}}{dt} - \left(\frac{d\bar{N}}{dt}\right)_C - \frac{\delta\bar{N}}{\delta t} \right] e^{-\bar{N}} d\vec{r}, \qquad (52)$$

де $\left(\frac{d\bar{N}}{dt}\right)_C$ визначається формулою (6) при заміні $N \to \bar{N}$, $S_C \to \bar{S}_C$; $\frac{\delta\bar{N}}{\delta t}$ – формулами (7)-(9), (1) при $N \to \bar{N}$, $S_C \to \bar{S}_C$, $S \to \bar{S}$; $\frac{d\bar{N}}{dt}$ – формулою типу (8), де $S_C \to \bar{N}$, $S \to \bar{S}$. Тоді функціонал

$$I = \frac{2C}{\hbar}\int F\left(\frac{\partial\bar{S}_C}{\partial t}, \nabla\bar{S}_C, \bar{S}', \nabla\bar{S}'\right) d\vec{r}, \qquad (53)$$

$$F\left(\frac{\partial\bar{S}_C}{\partial t}, \nabla\bar{S}_C, \bar{S}', \nabla\bar{S}'\right) = \\ = -\left[\frac{\partial\bar{S}_C}{\partial t} + \frac{(\nabla\bar{S}_C)^2}{2m} + \frac{(\nabla\bar{S}')^2}{2m} + V\right] e^{2\bar{S}'/\hbar}. \qquad (54)$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа [20] мають вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial\bar{S}_C} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial(\partial\bar{S}_C/\partial t)} - \nabla\frac{\partial F}{\partial(\nabla\bar{S}_C)} = 0, \qquad (55)$$

$$\frac{\partial F}{\partial\bar{S}'} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial(\partial\bar{S}'/\partial t)} - \nabla\frac{\partial F}{\partial(\nabla\bar{S}')} = 0. \qquad (56)$$

Використовуючи (54)-(56), отримаємо, що рівняння (55) співпадає з рівнянням (15), а рівняння (56) – з рівнянням (14). Таким чином, рівняння Шредінгера можна отримати з варіаційного принципу, який накладає певні обмеження на частотні зміни кількості квантів дії мікрочастинок.

Висновки

В межах ланжевенівського підходу до нерелятивістської квантової механіки показано можливий зв‘язок хвильового рівняння Шредінгера, співвідношень невизначеності Гейзенберга і принципу тотожності із стохастичним полем, пов‘язаним з існуванням у мікросвіті фундаментальних квантів дії $\hbar/2$ з неоднорідним розподілом Пуассона. Сформульовано квантовий постулат про густину імовірності положення частинок і подано іншу версію варіаційного принципу квантової механіки.

Рувінський М.А. – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фізики і хімії твердого тіла.

[1] М.Джеммер. *Эволюция понятий квантовой механики.* Наука, М. 380с. (1985).
[2] Б.Б.Кадомцев. *Динамика и информация.* УФН, М. 400с (1999).
[3] К.Р.Поппер. *Квантовая теория и раскол в физике*. Логос, М. 192с. (1998).
[4] А.Мессиа. *Квантовая механика. Т.1.* Наука, М. 480с. (1978).
[5] Д.И.Блохинцев. *Основы квантовой механики.* Наука, М. 664с. (1976).
[6] Р.Фейнман, А.Хибс. *Квантовая механика и интегралы по траекториям.* Мир, М. 382с. (1968).
[7] Ю.Б.Румер. *Исследование по 5-оптике.* ГИТТЛ, М. 152с. (1956).
[8] А.Ю.Глауберман. *Квантова механіка.* ЛДУ, Львів. 506с. (1962).
[9] І.Р.Юхновський. *Основи квантової механіки.* Либідь, Київ. 390с. (2002).
[10] І.О.Вакарчук. *Квантова механіка.* ЛНУ, Львів. 784с. (2004).
[11] М.А.Рувінський. Про правило додавання ймовірностей у квантовій механіці // *Фізика і хімія твердого тіла*, **6**(4), сс.708-711 (2005).
[12] П.Рамон. *Теория поля. Современный вводный курс.* Мир, М. 336с. (1984).
[13] М.А.Рувинский. Нерелятивистское уравнение Шредингера и двухскоростная пуассоновская стохастическая механика // *Изв. вузов: Физика, 1, с.125 (1986); Деп. в ВИНИТИ* 25.07.85, №5429-85.
[14] Ч.Киттель. *Элементарная статистическая физика.* ИЛ, М. 279с. (1960).
[15] С.М.Рытов. *Введение в статистическую радиофизику. Ч.1. Случайные процессы.* Наука, М. 495с. (1976).
[16] А.Д.Суханов. К квантовому обобщению равновесной статистической термодинамики. Эффективные макропараметры // *ТМФ*, **154**(1), сс.183-196 (2008).
[17] Ю.Л.Климонтович. *Статистическая физика.* Наука, М. 608с. (1982).
[18] И.Г.Каплан. Принцип запрета и неразличимость тождественных частиц в квантовой механике // *УФН.* **117**(4), сс.691-704 (1975).
[19] И.Г.Каплан. Постулат симметрии и его обоснование в рамках квантовой механики // *Теоретико-групповые методы в физике*, **1**. *Труды международного семинара.* Наука, М. сс.175-181 (1980).
[20] Дж.Мэтьюз, Р.Уокер. *Математические методы физики.* Атомиздат, М. 400с. (1972).

M.A. Ruvinskii

The Schrödinger Equation and the Fundamental Quantum of Action $\hbar/2$

Vasyl Stefanyk' Precarpathian National University,
57 Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk, 76000, Ukraine
bruvinsky@gmail.com

On the basis of idea about existance of the fundamental quantum of action $\hbar/2$ and availability of the stochastic number of action quanta of particle (or system of particles) with the non-uniform Poisson distribution, after the averaging and introduction of the postulate about proportionality of the probability of the zero value of the number of action quanta to the probability density of particle's position, it may come to the Schrodinger equation and the uncertainty Heisenberg's relation. The identity principle of the same microparticles is considered and the variational principle of quantum mechanics is formulated from the new point of view.